

---

Περιοδική e-έκδοση για τα  
Μαθηματικά Γυμνασίου  
<https://mathsgymnasio.wordpress.com/>

---

Η «Περιοδική Έκδοση για τα Μαθηματικά Γυμνασίου» επιλέχθηκε μετά από πρόσκληση και κρίση ως βέλτιστη πρακτική διδασκαλίας για τη βιωματική μάθηση των θετικών επιστημών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

Η πρακτική παρουσιάστηκε στο πλαίσιο του Ευρωπαϊκού προγράμματος «March: Making Science Real in Schools».

Υπουργείο Πολιτισμού, Παιδείας και Θρησκευμάτων  
Τμήμα Εκπαιδευτικής Ραδιοτηλεόρασης.  
Μάρτιος 2015

Τεύχος 8

---

## Περιεχόμενα

Σελίδα 5: Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄, Κεφάλαιο 2, Τριγωνομετρία – Διανύσματα

Σελίδα 21: Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄, Κεφάλαιο 3, Συναρτήσεις

**Δημιουργοί:**

Δουκάκης Σπυρίδων & Σαράφης Ιωάννης

**Συγγραφική συμβολή:**

Γκαρμπολάς Κωνσταντίνος & Πρωτοπαπάς Δημήτριος

**Κριτική ανάγνωση:**

Δημητρουλάκη Εμμανουέλλα, Ζαχαρίας Ιωάννης,  
Κάντα Σπυριδούλα & Μιχαλοπούλου Γεωργία

Αθήνα, Μάρτιος 2016  
Έκδοση 1.0



# Πρόλογος

Με το όγδοο τεύχος της περιοδικής έκδοσης για τα Μαθηματικά Γυμνασίου συνεχίζεται η προσέγγιση της ύλης των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου. Στο τρέχον τεύχος περιλαμβάνεται διδακτικό υλικό για το κεφάλαιο της γεωμετρίας: «Κεφάλαιο 2, Τριγωνομετρία – Διανύσματα» και το κεφάλαιο της άλγεβρας: «Κεφάλαιο 3, Συναρτήσεις». Το υλικό μπορεί να αξιοποιηθεί τόσο στο πλαίσιο της σχολικής τάξης, όσο και στο σπίτι από τον ίδιο τον μαθητή και την μαθήτριά.

Από το τεύχος αυτό τροποποιείται και ο τίτλος της περιοδικής έκδοσης, ώστε να είναι διακριτό ότι πρόκειται για μία ηλεκτρονική περιοδική έκδοση. Ο τίτλος έγινε: Περιοδική e-έκδοση για τα Μαθηματικά Γυμνασίου. Η ιδέα του νέου τίτλου δόθηκε από τον Ελευθέριο Μαστορίδη, Σχολικό Σύμβουλο Μαθηματικών στην Α΄ Αθηνών, στο πλαίσιο του 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με τίτλο «[Προγράμματα Σπουδών – Σχολικά εγχειρίδια: Από το παρελθόν στο παρόν και το μέλλον](#)», όπου παρουσιάστηκε η περιοδική έκδοση.

Το υλικό περιλαμβάνει φύλλα εργασίας τα οποία είναι δομημένα σε μορφή δίστηλου. Τα φύλλα εργασίας περιλαμβάνουν στην αριστερή στήλη και μέσα σε κατάλληλα πλαίσια θεωρία, χρήσιμες πληροφορίες, ιστορικά σημειώματα κ.α., τα οποία χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένα εικονίδια<sup>1</sup> για να μπορεί ο μαθητής και η μαθήτριά να διακρίνει το στόχο τους. Στο κύριο μέρος του φύλλου εργασίας ο μαθητής καλείται να εργαστεί ατομικά ή συνεργατικά για να οικοδομήσει τις γνώσεις τους, μέσα σε ένα πλαίσιο σκαλωσιάς μάθησης, βάσει του ισχύοντος προγράμματος σπουδών, των οδηγιών διδασκαλίας, του υλικού του σχολικού βιβλίου και του υλικού του βιβλίου εκπαιδευτικού. Το υλικό συνοδεύεται από επιλεγμένα μικροπειράματα<sup>2</sup> που προέρχονται από το ψηφιακό σχολείο, από άλλες πηγές ή έχουν αναπτυχθεί από τους συγγραφείς. Κάθε κεφάλαιο ολοκληρώνεται με ασκήσεις, που καλείται να λύσει ο μαθητής. Οι ασκήσεις έχουν αναπτυχθεί με γνώμονα τις ανάγκες της σχολικής τάξης και την εμβάθυνση των μαθητών στις μαθηματικές έννοιες.

Τα φύλλα εργασίας και οι ασκήσεις αποτελούν μία οργανωμένη συγκέντρωση των υπαρχουσών πηγών υλικού και στοχεύουν στην υποστήριξη της μάθησης των μαθητών και στην ενίσχυση της μαθηματικής εκπαίδευσης, μέσα από ένα πλούσιο σε πηγές πλαίσιο. Για το λόγο αυτό το υλικό προσφέρεται με άδεια Creative Commons, ώστε να είναι διαθέσιμο και «ανοικτό» σε όλη την εκπαιδευτική μαθηματική κοινότητα.

Το υλικό έχει δομηθεί με την υποστήριξη ομάδας εκπαιδευτικών, έχει δουλευτεί στις τάξεις, έχει αξιοποιηθεί από δεκάδες μαθητές και μαθήτρες και από αρκετούς εκπαιδευτικούς. Ευχαριστούμε για τη βοήθεια όλους τους συναδέλφους που μας στηρίζουν σε αυτή την προσπάθεια.

**Το Τεύχος 8 περιέχει υλικό για τη Β΄ Γυμνασίου,**

- **Μέρος Β΄, Κεφάλαιο 2, Τριγωνομετρία – Διανύσματα,**
- **Μέρος Α΄, Κεφάλαιο 3, Συναρτήσεις**

Καλή μελέτη!

Σπυρίδων Δουκάκης & Ιωάννης Σαράφης  
[mathsgymnasio@gmail.com](mailto:mathsgymnasio@gmail.com)



Αυτό το υλικό διατίθεται με άδεια Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή 4.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>).

Η αναφορά σε αυτό θα πρέπει να γίνεται ως εξής:

Δουκάκης, Σ., & Σαράφης, Ι. (2016). *Περιοδική e-έκδοση για τα Μαθηματικά Γυμνασίου, Τεύχος 8*, (Έκδοση 1.0, σ. 54).

<sup>1</sup> Τα εικονίδια προέρχονται από το βιβλίο: Βακάλη Α., Γιαννόπουλος Η., Ιωαννίδης Ν., Κοΐλιας Χ., Μάλαμας Κ., Μανωλόπουλος Ι., Πολίτης Π. (1999), *Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον*, ΙΤΥΕ, Διόφαντος.

<sup>2</sup> Τα μικροπειράματα προέρχονται από το Ψηφιακό σχολείο ([dschool.edu.gr](http://dschool.edu.gr)) και έχουν αναπτυχθεί από την ομάδα του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας με συντονιστή τον Καθ. Κυνηγό Χρόνη.

**Β' Γυμνασίου, Μέρος Β', Κεφάλαιο 2,  
Τριγωνομετρία – Διανύσματα**



# Μέρος Β' Κεφάλαιο 2ο Τριγωνομετρία – Διανύσματα

## B. 2.1. Εφαπτομένη οξείας γωνίας

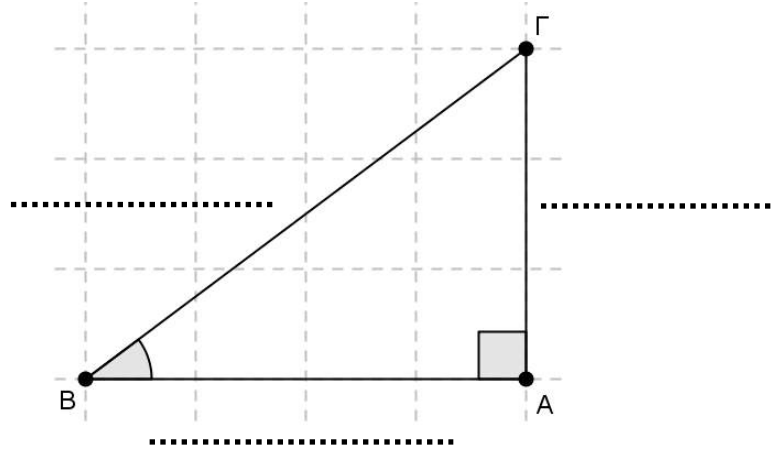


Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η κάθετη πλευρά  $AG$ , ονομάζεται «απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας  $\hat{B}$ » και η  $AG$  «προσκειμένη κάθετη πλευρά της γωνίας  $\hat{B}$ ».



Κάθε πλευρά ενός τριγώνου μπορεί να αναφέρεται με το πεζό γράμμα της απέναντι γωνίας. Έτσι, η πλευρά  $B\Gamma$ , μπορεί να αναφέρεται ως  $\alpha$ , η πλευρά  $AG$ , μπορεί να αναφέρεται ως  $\beta$  και η πλευρά  $AB$ , μπορεί να αναφέρεται ως  $\gamma$ . (Παρατηρήστε ότι το πεζό γράμμα είναι το γράμμα που δεν περιλαμβάνεται στον προσδιορισμό του ευθύγραμμου τμήματος)

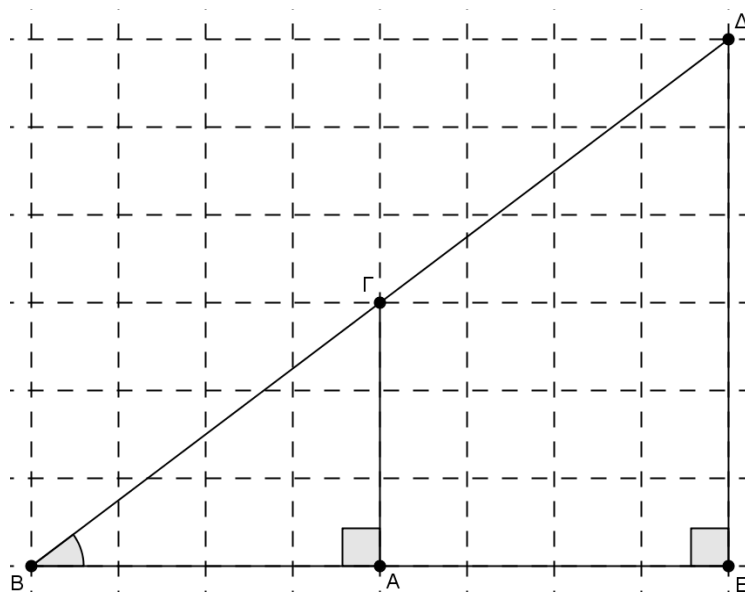
1. Δίνεται το ακόλουθο ορθογώνιο τρίγωνο. Να σημειώσετε στις διακεκομμένες γραμμές την υποτείνουσα, την απέναντι κάθετη πλευρά στη γωνία  $B$  και την προσκειμένη κάθετη πλευρά στη γωνία  $B$ .



2. Να μετρήσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου  $AB\Gamma$  γνωρίζοντας ότι κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά  $1\text{ cm}$ . Καταγράψτε στον πίνακα που ακολουθεί τις μετρήσεις σας.

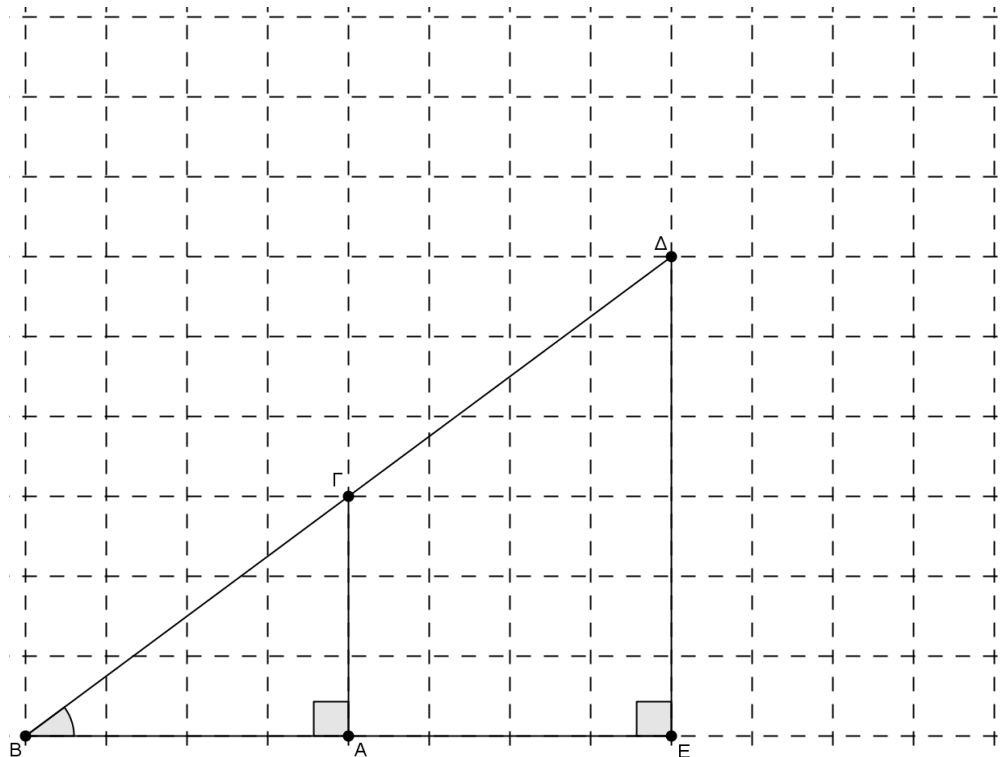
Τρίγωνο	$AB$ ή $\gamma$	$AG$ ή $\beta$	$B\Gamma$ ή $\alpha$
$AB\Gamma$			

3. Να μετρήσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου  $EBA$  γνωρίζοντας ότι κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά  $1\text{ cm}$ . Καταγράψτε στον παραπάνω πίνακα τις μετρήσεις σας.



Τρίγωνο	$BE$	$EA$	$BA$
$EBA$			

4. Στο σχήμα που ακολουθεί να προεκτείνετε τις πλευρές ΒΕ και ΒΔ του τριγώνου ΒΔΕ προς το Ε και το Δ αντίστοιχα, ώστε να σχεδιάσετε ένα τρίτο ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές Η και Θ (ονομάστε Θ την κορυφή της ορθής γωνίας).



Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας  $\omega$  ενός ορθογώνιου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός. Ονομάζεται **εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$**  και συμβολίζεται με **εφ $\omega$** .

$$\text{εφ}\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκειμενη}}$$

όπου **απέναντι** προσδιορίζεται η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας  $\omega$  και όπου **προσκειμένη** προσδιορίζεται η προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας  $\omega$ .



Η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας  $\omega$  είναι ένας «καθαρός» αριθμός, δηλαδή δεν υπάρχει κάποια μονάδα μέτρησης για αυτόν τον αριθμό.

5. Να μετρήσετε τα μήκη των καθέτων πλευρών του τριγώνου ΘΒΗ που κατασκευάσατε γνωρίζοντας ότι κάθε τετραγώνάκι έχει πλευρά 1 cm.

α) Καταγράψτε στον πίνακα που ακολουθεί τις μετρήσεις σας καθώς και τους

λόγους  $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$ ,  $\frac{ΔΕ}{ΒΕ}$  και  $\frac{ΗΘ}{ΒΘ}$ .

Τρίγωνο ΑΒΓ	ΑΒ	ΑΓ	ΒΓ	$\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$
	4	3	5	
Τρίγωνο ΕΒΔ	ΒΕ	ΔΕ	ΒΔ	$\frac{ΔΕ}{ΒΕ}$
	8	6	10	
Τρίγωνο ΘΒΗ	ΒΘ	ΗΘ	ΒΗ	$\frac{ΗΘ}{ΒΘ}$

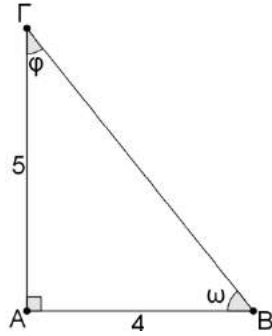
β) Τι παρατηρείτε;

.....

.....

6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ οι κάθετες πλευρές έχουν μήκος 5 και 4 cm αντίστοιχα.

Να προσδιορίσετε:



- α) Την απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας ω: .....
- β) Την προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας ω: .....
- γ) Την εφαπτομένη της γωνίας ω: .....
- δ) Την απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας φ: .....
- ε) Την προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας φ: .....
- στ) Την εφαπτομένη της γωνίας φ: .....

7. Η πινακίδα πληροφορεί τον ποδηλάτη πόσο ανηφορικός είναι ο δρόμος. Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mp1.ggb](#), με σκοπό να διερευνήσετε τα ερωτήματα. Τι παρατηρείτε;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....


.....

.....


.....



  
Όταν αναφερόμαστε σε δρόμο, η εφαπτομένη της γωνίας ω ονομάζεται και κλίση του δρόμου.

  
Το ποσοστό 10% ή  $\frac{10}{100} = 0,1$  σημαίνει ότι σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 10 m.

8. Να σχεδιάσετε μια γωνία ω, με  $\epsilon\phi\omega = \frac{1}{5}$ . Εργαστείτε και με ψηφιακά εργαλεία στο μικροπείραμα [mp2.ggb](#).

  
Για τον υπολογισμό της εφαπτομένης μιας γωνίας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 1° - 89°, που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου (σελ. 254).

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με υποτείνουσα  $B\Gamma = 13$  cm. Αν η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος  $AB = 5$  cm, να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ .

.....

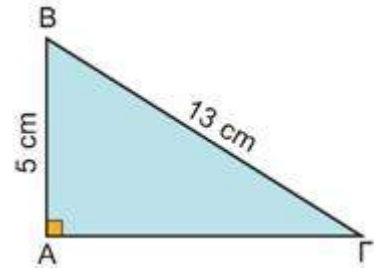
.....

.....

.....

.....

.....



10. Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mp3.ggb](http://mp3.ggb).

- α) Από τι εξαρτάται το μήκος της σκιάς ενός δέντρου;
- β) Μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος ενός δέντρου χωρίς να πλησιάσουμε την κορυφή του;

.....

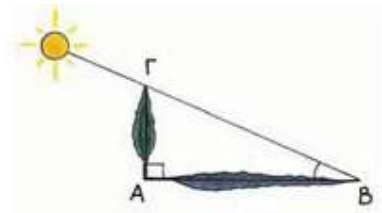
.....

.....

.....

.....

.....



11. Ένας τουρίστας ύψους  $A\Gamma = 1,80$  m «βλέπει» τον πύργο με γωνία  $32^\circ$  και απέχει από αυτόν 45 m. Να υπολογίσετε το ύψος  $E\Delta$  του πύργου.

.....

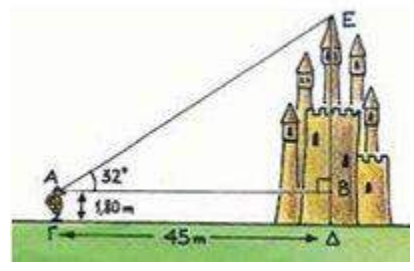
.....

.....

.....

.....

.....





## B. 2.2. Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας



Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας  $\omega$  ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός. Ονομάζεται **ημίτονο της γωνίας  $\omega$**  και συμβολίζεται με  **$\eta\omega$** .

$$\eta\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}}$$



Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας  $\omega$  ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός. Ονομάζεται **συνημίτονο της γωνίας  $\omega$**  και συμβολίζεται με  **$\sigma\omega\omega$** .

$$\sigma\omega\omega = \frac{\text{προσκειμένη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

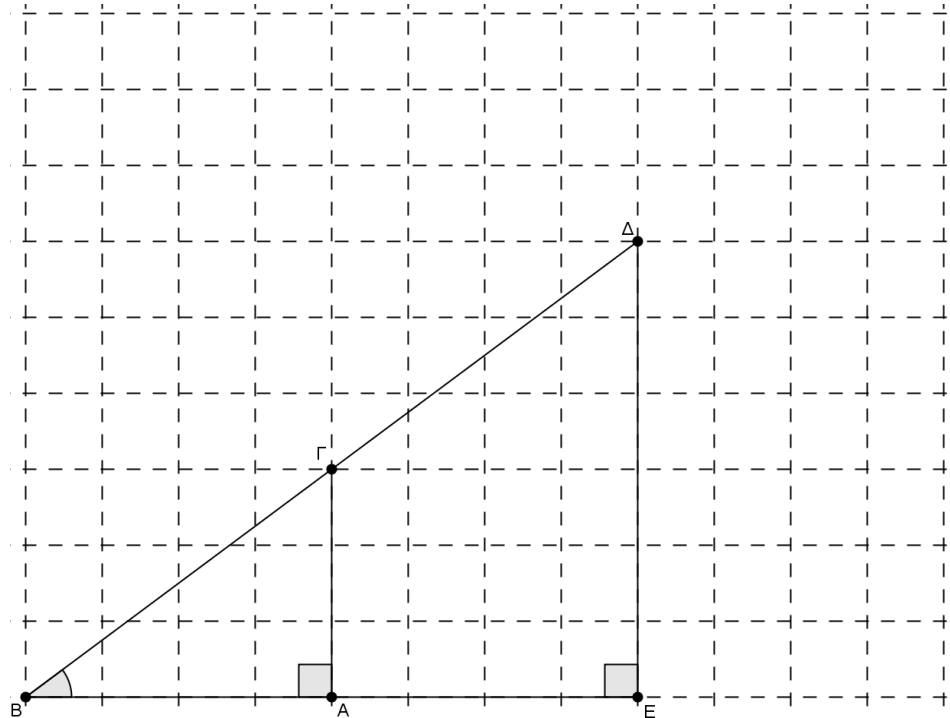


Το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας  $\omega$  είναι (όπως και η εφαιπτομένη) «καθαροί» αριθμοί.



Το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαιπτομένη μιας γωνίας  $\omega$  ονομάζονται τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $\omega$ .

12. Στο σχήμα που ακολουθεί να προεκτείνετε τις πλευρές  $BE$  και  $BD$  του τριγώνου  $BDE$  προς το  $E$  και το  $\Delta$  αντίστοιχα, ώστε να σχεδιάσετε ένα τρίτο ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές  $H$  και  $\Theta$  (ονομάστε  $\Theta$  την κορυφή της ορθής γωνίας).



13. Να μετρήσετε τα μήκη των καθέτων πλευρών του τριγώνου  $\Theta BH$  που κατασκευάσατε γνωρίζοντας ότι κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 cm.

- α) Καταγράψτε στον πίνακα που ακολουθεί τις μετρήσεις σας, και στη συνέχεια τους λόγους των μηκών των πλευρών των τριγώνων.

Τρίγωνο <b>ABΓ</b>	<b>AB</b>	<b>ΑΓ</b>	<b>ΒΓ</b>	$\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$	$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$
	4	3	5		
Τρίγωνο <b>ΕΒΔ</b>	<b>BE</b>	<b>ΔΕ</b>	<b>ΒΔ</b>	$\frac{ΔΕ}{ΒΔ}$	$\frac{ΒΕ}{ΒΔ}$
	8	6	10		
Τρίγωνο <b>ΘBH</b>	<b>ΒΘ</b>	<b>ΗΘ</b>	<b>BH</b>	$\frac{ΗΘ}{BH}$	$\frac{ΒΘ}{BH}$

- β) Τι παρατηρείτε;

.....

.....



Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτεινούσα είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις κάθετες πλευρές, οπότε οι λόγοι:

$\frac{\text{απεναντι κάθετη}}{\text{υποτεινούσα}}$

και

$\frac{\text{προσκειμενη κάθετη}}{\text{υποτεινούσα}}$

είναι μικρότεροι της μονάδας.

Επομένως ισχύουν οι ανισώσεις:

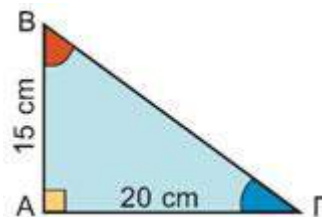
$$0 < \eta\mu\omega < 1$$

και

$$0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$$

για οποιαδήποτε οξεία γωνία  $\omega$ .

14. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κάθετες πλευρές  $AB = 15 \text{ cm}$  και  $A\Gamma = 20 \text{ cm}$ . Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ . Τι παρατηρείτε;



.....

.....

.....

.....

.....

.....

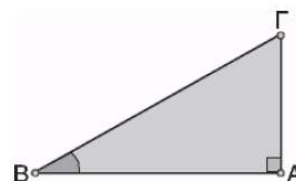
.....

15. Να σχεδιάσετε μία οξεία γωνία  $\omega$ , με  $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ . Εργαστείτε και με ψηφιακά εργαλεία στο μικροπείραμα [mp4.ggb](http://mp4.ggb).

16. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) έχουμε  $\eta\mu B = \frac{4}{5}$  και  $B\Gamma = 10 \text{ cm}$ .

α) Να βρείτε τις κάθετες πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$ .

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

17. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 25$  cm,  $A\Gamma = 20$  cm και  $B\Gamma = 15$  cm.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.
- β) Να υπολογίσετε το  $\eta\mu A$  και το  $\sigma\upsilon\nu A$ .
- γ) Να υπολογίσετε το  $\eta\mu B$  και το  $\sigma\upsilon\nu B$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

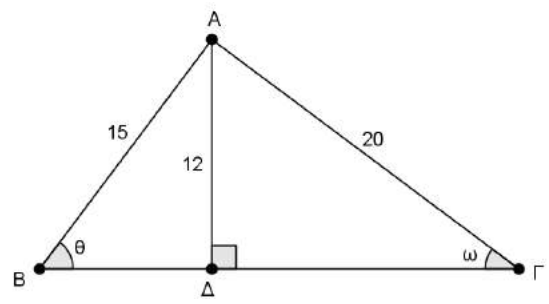
.....

.....

.....

.....

18. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το  $\eta\mu\theta$  και το  $\sigma\upsilon\nu\omega$ .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### B. 2.4. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°



19. Στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο του διπλανού σχήματος, οι κάθετες πλευρές AB και AG έχουν μήκος 1 m η κάθε μία.

- α) Να προσδιορίσετε το μέτρο κάθε γωνίας του.
- β) Να υπολογίσετε τον τριγωνομετρικό αριθμό των μη ορθών γωνιών.

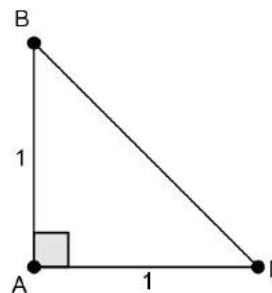
.....

.....

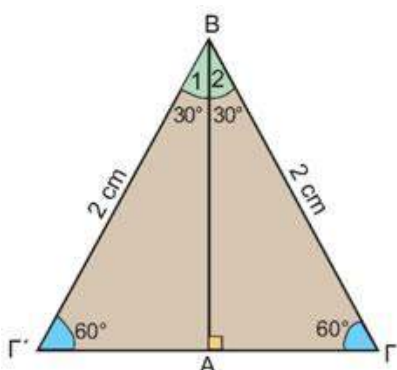
.....

.....

.....



20. Ας θεωρήσουμε τώρα δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και ABΓ' με κοινή πλευρά την AB, οξείες γωνίες  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 30^\circ$  και υποτείνουσες  $B\Gamma = B\Gamma' = 2\text{ cm}$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς  $\eta\mu 30^\circ$ ,  $\sigma\upsilon\nu 30^\circ$ ,  $\epsilon\phi 30^\circ$ ,  $\eta\mu 60^\circ$ ,  $\sigma\upsilon\nu 60^\circ$  και  $\epsilon\phi 60^\circ$ .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών των  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  και  $60^\circ$  θα θεωρούνται γνωστοί και δεν θα δίνονται σε ασκήσεις οπότε θα πρέπει να τους μάθετε!

**21. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα:**

		$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	
<b>Ημίτονο</b>					
<b>Συνημίτονο</b>					
<b>Εφαπτομένη</b>					

**22. Να αποδείξετε ότι το ύψος και το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α, δίνονται από τους τύπους:**  $υ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$  και  $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ .

$$\alpha, \text{ δίνονται από τους τύπους: } \upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \text{ και } E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Η εφαρμογή 22 μπορεί να λυθεί εναλλακτικά με το Πυθαγόρειο Θεώρημα;

23. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ, ΒΔ, ΓΔ.

.....

.....

.....

.....

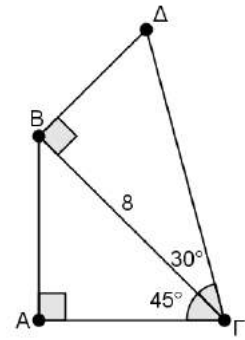
.....

.....

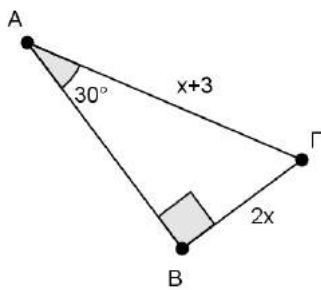
.....

.....

.....



24. Να υπολογίσετε το  $x$  στα ακόλουθα σχήματα.



.....

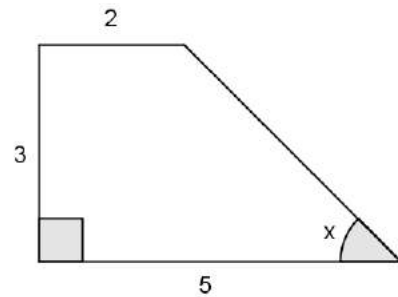
.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

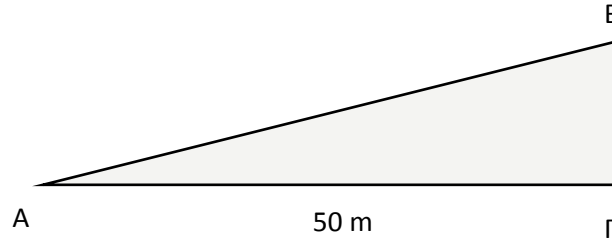
.....

.....

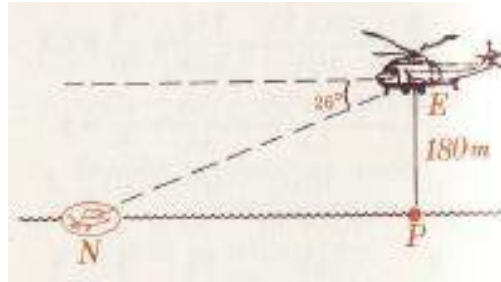
.....

## Ασκήσεις προς λύση Εφαπτομένη οξείας γωνίας

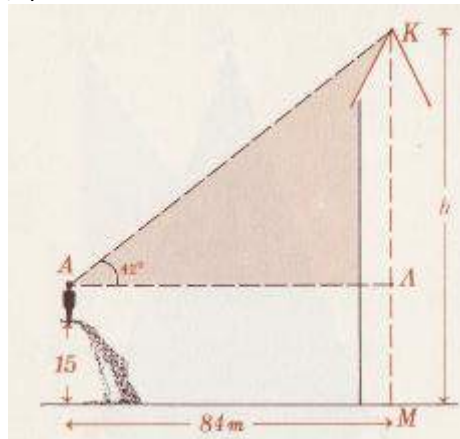
- 1.1.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κάθετες πλευρές  $AB$  και  $AG$  τέτοιες ώστε  $AG = 2AB$ . Να βρείτε τις εφαπτομένες των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$ .
- 1.2.** Η κλίση του δρόμου  $AG$  είναι 10%. Να υπολογίσετε πόσα μέτρα είναι ψηλότερα το σημείο  $B$  από το σημείο  $\Gamma$ .



- 1.3.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 15$  cm και  $B\Gamma = 40$  cm. Φέρουμε το ύψος  $AD$ . Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $240$  cm<sup>2</sup>. Να υπολογίσετε την εφαπτομένη της γωνίας  $\widehat{BA\Delta}$ .
- 1.4.** Ένα ελικόπτερο (θέση  $E$ ) προσπαθεί να διασώσει ένα ναυαγό (θέση  $N$ ). Το ελικόπτερο απέχει από την επιφάνεια της θάλασσας  $180$  m και βλέπει το ναυαγό υπό γωνία βάθους  $26^\circ$ . Να υπολογίσετε την οριζόντια απόσταση  $NP$  με προσέγγιση μέτρου. (Δίνεται  $\epsilon\phi 26^\circ = 0,488$ ).



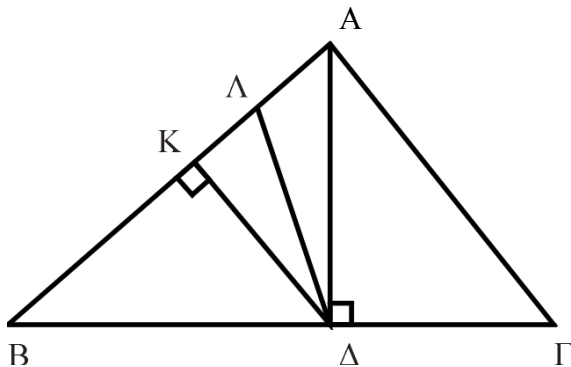
- 1.5.** Ένας άνθρωπος ύψους  $1,70$  m βρίσκεται σ' ένα λόφο που έχει ύψος  $15$  m και παρατηρεί υπό γωνία ύψους  $42^\circ$ , την κορυφή  $K$  ενός μνημείου που απέχει απόσταση  $AA = 84$  m. Να υπολογίσετε το συνολικό ύψος  $h = KM$  του μνημείου. (Δίνεται  $\epsilon\phi 42^\circ = 0,9$ ).



### Ημίτονο και Συνημίτονο οξείας γωνίας

- 1.6. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $\text{συν}\Gamma = 0,8$  και  $B\Gamma = 10$  cm. Να υπολογίσετε:  
 α) το  $\eta\mu\Gamma$   
 β) το εμβαδόν του τριγώνου

- 1.7. Με βάση το παρακάτω σχήμα:



- α) Το  $\text{συν}B$  ισούται με:

A.  $\frac{B\Lambda}{B\Delta}$

B.  $\frac{BA}{B\Gamma}$

Γ.  $\frac{BK}{B\Delta}$

Δ.  $\frac{B\Delta}{BK}$

Ε.  $\frac{B\Lambda}{\Lambda\Delta}$

- β) Το  $\eta\mu B$  ισούται με:

A.  $\frac{\Delta\Lambda}{B\Delta}$

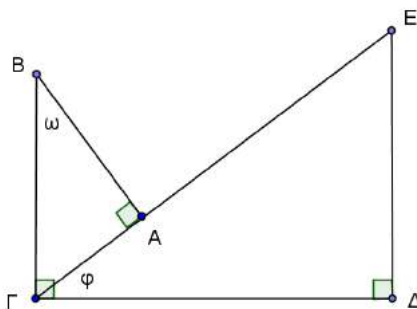
B.  $\frac{A\Delta}{B\Delta}$

Γ.  $\frac{A\Delta}{AB}$

Δ.  $\frac{\Delta K}{BK}$

Ε.  $\frac{B\Lambda}{B\Delta}$

- 1.8. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται  $\Delta E = 6$  cm,  $\Gamma\Delta = 8$  cm,  $AE = 7$  cm και  $AB = 4$  cm. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες  $\omega$  και  $\phi$  είναι ίσες.



- 1.9. Έστω η οξεία γωνία  $\omega$  για την οποία ισχύει ότι  $\text{συν}\omega = \frac{9x-1}{3} - \frac{9x+4}{6}$  και  $x$  ακέραιος. Να υπολογίσετε το  $\text{συν}\omega$ .

- 1.10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ , και πλευρές  $AB = \gamma$ ,  $B\Gamma = \alpha$  και  $A\Gamma = \beta$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $\text{συν}^2B + \text{συν}^2\Gamma = 1$

β)  $\text{συν}B = \eta\mu\Gamma$

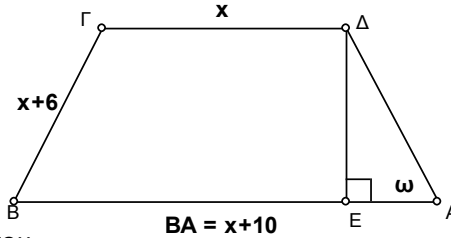
γ)  $\epsilon\phi B = \frac{\eta\mu B}{\text{συν}B}$ .



**1.11.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Η κάθετη πλευρά ΑΓ είναι διπλάσια της ΑΒ. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Β.

**1.12.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με ΑΓ=24cm και  $\text{συν}B = \frac{4}{5}$ . Να υπολογίσετε τις πλευρές ΒΓ και ΑΒ του τριγώνου.

**1.13.** Στο παρακάτω σχήμα το τραπέζιο είναι ισοσκελές και έχει περίμετρο 50 cm. Να υπολογίσετε:



α) Τις πλευρές του και το ύψος του.

β) Την παράσταση  $A = \frac{13 \cdot \eta\mu\omega - 5\epsilon\phi\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

**1.14.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 5 cm και ΒΓ = 6 cm. Να υπολογίσετε:

α) Το ύψος ΑΔ του τριγώνου.

β) το ημίτονο, το συνημίτονο, και την εφαπτομένη των γωνιών της βάσης του.

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί 30°, 45°, 60°

**1.15.** Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ = ΑΓ = 10 cm και  $\hat{A} = 120^\circ$ . Να υπολογίσετε την περίμετρο του.

**1.16.** Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΓ = 6 cm, ΑΒ = 10 cm και  $\hat{A} = 60^\circ$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

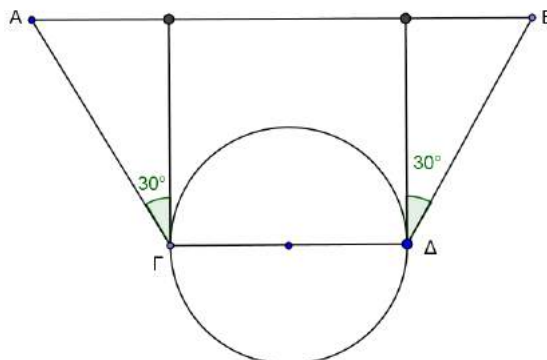
**1.17.** Να υπολογίσετε την παράσταση:

α)  $\text{συν}^2 45^\circ - \frac{1}{\sqrt{6}} \eta\mu 45^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ$

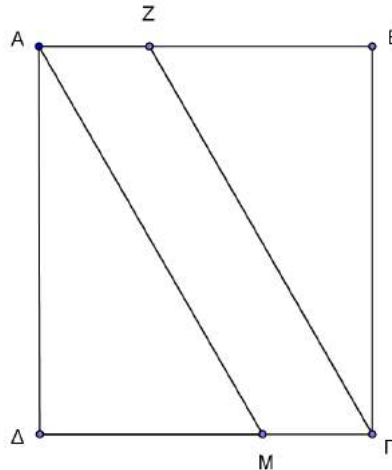
β)  $\epsilon\phi 45^\circ \cdot \epsilon\phi 30^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ (\eta\mu 30^\circ + \eta\mu 45^\circ + \eta\mu 60^\circ)$

γ)  $\frac{\eta\mu 30^\circ - \eta\mu 45^\circ}{\text{συν} 45^\circ + \text{συν} 60^\circ}$

**1.18.** Δύο δορυφόροι τηλεπικοινωνίας βρίσκονται στην ίδια τροχιά και σε θέσεις Α και Β ώστε να επιτρέπουν την επικοινωνία μεταξύ δύο τόπων (Γ και Δ) που βρίσκονται σε διαμετρική θέση πάνω στη Γη. Αν η γωνία ύψους των δορυφόρων είναι 30° και οι αποστάσεις ΑΓ, ΒΔ είναι 30.000 Km, να υπολογίσετε την απόσταση των δύο δορυφόρων ΑΒ. (Ακτίνα της Γης R=6400 Km).



- 1.19.** Η κεραμοσκεπή ενός δωματίου, που έχει κλίση  $60^\circ$ , έπαθε ζημιά. Μετά από μια καταιγίδα μια κηλίδα νερού εμφανίστηκε στο δάπεδο σε απόσταση 2 m από τον τοίχο. Σε ποια απόσταση από το ψηλότερο σημείο της σκεπής βρίσκεται το σπασμένο κεραμίδι;
- 1.20.** Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 6$  cm και  $AZ = 2$  cm. Φέρουμε την  $AM$  ώστε το  $AM\Gamma Z$  να είναι παραλληλόγραμμο. Αν το μέτρο της γωνίας  $\widehat{AM\Delta}$  είναι ίσο με  $60^\circ$  τότε να υπολογίσετε:  
**α)** τα μήκη  $AD = \gamma$  και  $AM = x$   
**β)** τα εμβαδά των  $AB\Gamma\Delta$  και  $AM\Gamma Z$



- 1.21.** Ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει  $\widehat{B} = 30^\circ$  και  $\widehat{\Gamma} = 45^\circ$  και ύψος  $AD = 10$  cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.
- 1.22.** Ένα ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  έχει  $AB = 20$  cm,  $\Gamma\Delta = 6$  cm και  $\widehat{A} = \widehat{B} = 45^\circ$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
- 1.23.** Η βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 16 cm. Αν καθεμιά από τις ίσες γωνίες του είναι τετραπλάσια από την γωνία της κορυφής του, να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του.
- 1.24.** Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\widehat{A} = 150^\circ$ ,  $AD = 10$  cm και  $AB = 20$  cm. Να υπολογίσετε το ύψος  $AE$  και το εμβαδό του παραλληλογράμμου.

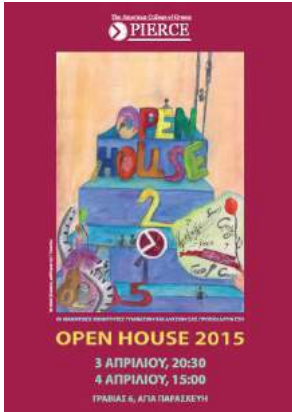
(Οι ασκήσεις 1.4, 1.5 προέρχονται από το βιβλίο: Αλεξίου, Κ.Τ., Αμπλιανίτου, Γ., Καββαδίας, Κ. (1990). Μαθηματικά Β' Γυμνασίου, Βιβλιοεκδοτική Αναστασάκη, Αθήνα.)

**Β' Γυμνασίου, Μέρος Α', Κεφάλαιο 3,  
Συναρτήσεις**



## Κεφάλαιο 3ο – Συναρτήσεις

### 3.1. Η έννοια της συνάρτησης



Εξαρτημένη μεταβλητή καλείται η μεταβλητή που η τιμή της καθορίζεται από την τιμή που θα δώσουμε στην ανεξάρτητη μεταβλητή. Την ανεξάρτητη μεταβλητή τη συμβολίζουμε συνήθως με  $x$  και την εξαρτημένη με  $y$ .

1. Ας υποθέσουμε ότι για τις εκδηλώσεις του Open House, το τμήμα έχει αναλάβει να κατασκευάσει και να πουλήσει βραχιόλια και κομπολόγια, όπου το καθένα θα πωλείται προς 2,25 ευρώ.

Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα:

Πλήθος αντικειμένων που θα πωληθούν	Έσοδα
0	
1	
2	
3	
4	
8	
17	

Συνεπώς, τα **έσοδα εξαρτώνται** από το πλήθος των αντικειμένων που θα πουλήσετε. Άρα το πλήθος των αντικειμένων που θα πουλήσετε είναι η **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ τα έσοδα είναι η **εξαρτημένη μεταβλητή**. Μπορούμε να πούμε ότι:

**Τα έσοδα είναι συνάρτηση** του πλήθους των αντικειμένων που θα πουλήσετε.

2. Ένας εργαζόμενος αμείβεται με 4,75 ευρώ την ώρα.
- α)** Από τι εξαρτάται το ποσό της αμοιβής του;
- .....
- .....
- β)** Να προσδιορίσετε ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή.
- .....
- .....
- γ)** Να περιγράψετε λεκτικά την παραπάνω σχέση χρησιμοποιώντας τις λέξεις **είναι συνάρτηση**.
- .....
- .....



3. Για να κάνουμε ένα ντους καταναλώνουμε 15 λίτρα νερό ανά λεπτό.

α) Από τι εξαρτάται η ποσότητα νερού που θα καταναλώσουμε;

.....  
 .....

β) Να προσδιορίσετε ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή.

.....  
 .....

γ) Να περιγράψετε λεκτικά την παραπάνω σχέση χρησιμοποιώντας τις λέξεις **είναι συνάρτηση**.

.....  
 .....



Μία **συνάρτηση** είναι μία σχέση όπου κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής.

4. Στον πίνακα που συμπληρώσατε στην πρώτη δραστηριότητα έχετε γράψει τις ακόλουθες τιμές:

Πλήθος αντικειμένων που θα πωληθούν	Έσοδα
0	0
1	2,25
2	4,5
3	6,75
4	9
8	18
17	38,25

**Τα έσοδα είναι συνάρτηση** του πλήθους των αντικειμένων που θα πουλήσετε.

5. Δίνονται οι ακόλουθοι πίνακες τιμών. Να προσδιορίσετε αν τα ζεύγη τιμών αποτελούν συνάρτηση.

x	11	12	13	20
y	-2	-1	0	7

x	-2	-3	6	-2
y	-1	0	3	1

..... ..... ..... .....	..... ..... ..... .....
----------------------------------	----------------------------------



Στα μαθηματικά η συνάρτηση είναι μία εξίσωση που περιγράφει την σχέση που συνδέει την ανεξάρτητη με την εξαρτημένη μεταβλητή.



Για να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης για κάποια συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής:

1. Αντικαθιστάτε την ανεξάρτητη μεταβλητή με την τιμή που σας δίνεται.
2. Εκτελείτε τις πράξεις και βρίσκετε την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής.

6. α) Να σχεδιάσετε έναν πίνακα τιμών όπου τα ζεύγη τιμών αποτελούν συνάρτηση.  
 β) Να σχεδιάσετε έναν πίνακα τιμών όπου τα ζεύγη τιμών δεν αποτελούν συνάρτηση.

Αποτελούν Συνάρτηση	
x	y

Δεν αποτελούν Συνάρτηση	
x	y

7. Ας επιστρέψουμε σε μια προηγούμενη δραστηριότητα. Να μελετήσετε τον συμπληρωμένο πίνακα της δραστηριότητας 4 και στη συνέχεια να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης.

.....  
 .....

8. Δίνεται η συνάρτηση  $y = 2x + 3$ . Να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης για  $x = 4$ .

.....

9. α) Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση  $\kappa = 2\lambda^2 - 7$  είναι συνάρτηση.

- β) Να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης για  $\lambda = -4$ .

.....  
 .....  
 .....

10. Για τη συνάρτηση  $\alpha = \beta^2 - 2$  να συμπληρώσετε τα κενά και των πίνακα τιμών.

Για  $\alpha = -2$ ,  $\beta = \dots\dots\dots$

Για  $\alpha = -1$ ,  $\beta = \dots\dots\dots$

Για  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \dots\dots\dots$

Για  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \dots\dots\dots$

Για  $\alpha = 2$ ,  $\beta = \dots\dots\dots$

<b>α</b>	-2	-1	0	1	2
<b>β</b>					

11. Δίνεται η συνάρτηση  $s = 2t + 3$ . Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

<b>s</b>	2	0	4	-3	-1
<b>t</b>					

12. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

<b>x</b>	-5		-3		-1		0
<b>y = -5x + 20</b>		-5		5		10	

13. Οι τιμές ενός καταστήματος ηλεκτρονικών επιβαρύνονται με ΦΠΑ (Φόρο Προστιθέμενης Αξίας) 23%. Να εκφράσετε τις τιμές  $y$  με ΦΠΑ, ως συνάρτηση των τιμών  $x$  χωρίς ΦΠΑ.

.....

.....

.....

14. Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκη  $x$  και  $y$  (σε cm). Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 60 cm, να εκφράσετε την πλευρά  $y$  ως συνάρτηση της πλευράς  $x$ .

.....

.....

.....

15. Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκος  $x + 2$  cm και πλάτος  $x - 1$  cm.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο  $y$  του ορθογωνίου συναρτήσει του  $x$ .

.....

.....

β) Ποια η περίμετρος του ορθογωνίου αν  $x = 2$ ;

.....

γ) Για ποια τιμή του  $x$  το ορθογώνιο έχει περίμετρο 22 cm;

.....

.....

δ) Να συμπληρώσετε των παρακάτω πίνακα τιμών.

<b>x</b>	2	3	4		
<b>y</b>				30	42



**16.** Κατά την ανακύκλωση ενός τόνου χαρτιού έχει υπολογιστεί ότι γλιτώνουμε 17 δέντρα, 26320 λίτρα νερού, 1753 λίτρα πετρελαίου, 587 κυβικά εκατοστά αέρα, 233 κυβικά μέτρα γης και 4077 kw ενέργειας. Επιπλέον, από κάθε κιλό χαρτιού που ανακυκλώνουμε, λαμβάνουμε χαρτόμαζα 700 γραμμαρίων.

- α)** Πόσα κιλά χαρτόμαζας θα λάβουμε από την ανακύκλωση 500 κιλών χαρτιού;
- β)** Να εκφράσετε την ποσότητα  $\gamma$  σε κιλά χαρτόμαζας, που θα λάβουμε, ως συνάρτηση της ποσότητας  $x$  χαρτιού που δίνουμε για ανακύκλωση.
- γ)** Πόσα κιλά χαρτιού πρέπει να δώσουμε για ανακύκλωση, ώστε να πάρουμε 250 κιλά χαρτόμαζας;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 3.2. Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης



#### Σύστημα συντεταγμένων

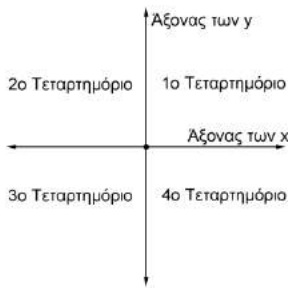


Το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων κατασκευάζεται από δύο ευθείες αριθμών (άξονες) οι οποίες τέμνονται κάθετα.

Ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας των  $x$  και ο κατακόρυφος άξονας είναι ο άξονας των  $y$ .



Το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι η αρχή των αξόνων. Το σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα μέρη που λέγονται τεταρτημόρια.



Ένα μόνο ζεύγος αριθμών προσδιορίζει τη θέση ενός σημείου. Αυτοί οι αριθμοί είναι οι συντεταγμένες του σημείου. Ο πρώτος από αυτούς τους αριθμούς λέγεται τετμημένη του σημείου και ο δεύτερος λέγεται τεταγμένη του σημείου. Οπότε έχουμε για παράδειγμα το σημείο

$Z(-2, 4)$

Τετμημένη      Τεταγμένη

Όταν οι άξονες είναι κάθετοι και οι μονάδες μέτρησης έχουν το ίδιο μήκος, το σύστημα λέγεται ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε συστήματα αξόνων με διαφορετικού μήκους μονάδες μέτρησης στους άξονες  $x'$  και  $y'$ .

17. Ένας επισκέπτης μίας πόλης θέλει να επισκεφτεί το μουσείο της. Ας εργαστούμε στο μικροπείραμα [mp5.ggb](#) για να μελετήσουμε το θέμα της επίσκεψης.

18. Στο ακόλουθο σύστημα αξόνων:

α) Να εντοπίσετε τα σημεία με συντεταγμένες:

(i)  $(2, 3)$                       (ii)  $(-2, 2)$

(iii)  $(-4, -3)$                   (iv)  $(0, -4)$

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων:

(i) Δ                                  (ii) Κ

(iii) Ε                                (iv) Λ

γ) Να προσδιορίσετε και να ονοματίσετε τα σημεία με συντεταγμένες:

(i)  $(3, 0)$               (ii)  $(-1, \frac{3}{2})$               (iii)  $(1, -\sqrt{2})$               (iv)  $(0, -6)$

δ) Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το σημείο με συντεταγμένες:

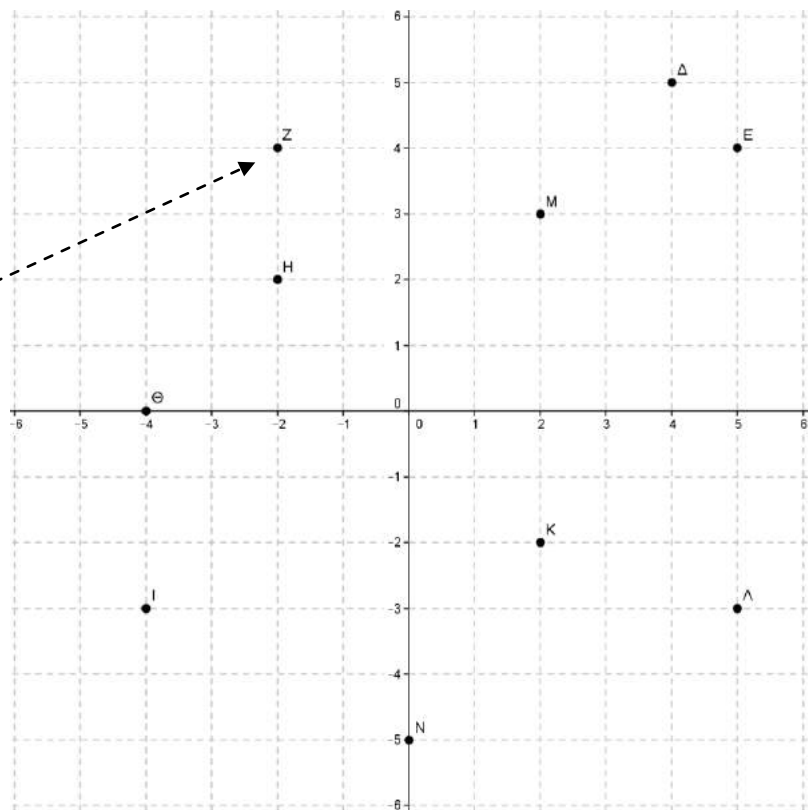
(i)  $(6, 5)$               (ii)  $(-8, 3)$               (iii)  $(-7, -11)$               (iv)  $(0, 30)$

ε) Να προσδιορίσετε και να ονοματίσετε τα σημεία με συντεταγμένες:

(i)  $(3, 3)$               (ii)  $(-3, 3)$               (iii)  $(-3, -3)$               (iv)  $(3, -3)$

στ) Ενώστε τα σημεία και προσδιορίστε το σχήμα που προκύπτει.

Για να βρούμε τις συντεταγμένες ενός σημείου, φέρνουμε από το σημείο παράλληλη προς τον άξονα  $y'y'$  που τέμνει τον άξονα  $x'x'$  σε ένα σημείο. Το σημείο τομής είναι η τετμημένη. Αντίστοιχα φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα  $x'x'$  που τέμνει τον άξονα  $y'y'$  σε ένα σημείο. Το σημείο τομής είναι η τεταγμένη.



στ) Να γράψετε μία πρόταση για να αναφερθείτε στο χαρακτηριστικό που έχουν οι συντεταγμένες των σημείων που βρίσκονται στο τέταρτο τεταρτημόριο.

.....

.....



Κάθε σημείο του άξονα  $x$ ' έχει τεταγμένη 0 και κάθε σημείο του άξονα  $y$  ' έχει τεταγμένη 0.



Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος  $y$  εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους  $x$ . Ονομάζουμε **γραφική παράσταση της συνάρτησης** αυτής το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες  $(x, y)$ .



Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δίνει μια «εποπτική» εικόνα της συνάρτησης αυτής και μας βοηθάει να αντιλήσουμε χρήσιμες πληροφορίες για τη σχέση των μεταβλητών  $x$  και  $y$ .

19. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ και Δ του παρακάτω σχήματος.

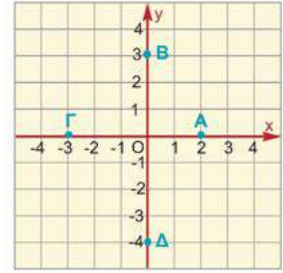
Τι συμπεραίνετε;

.....

.....

.....

.....

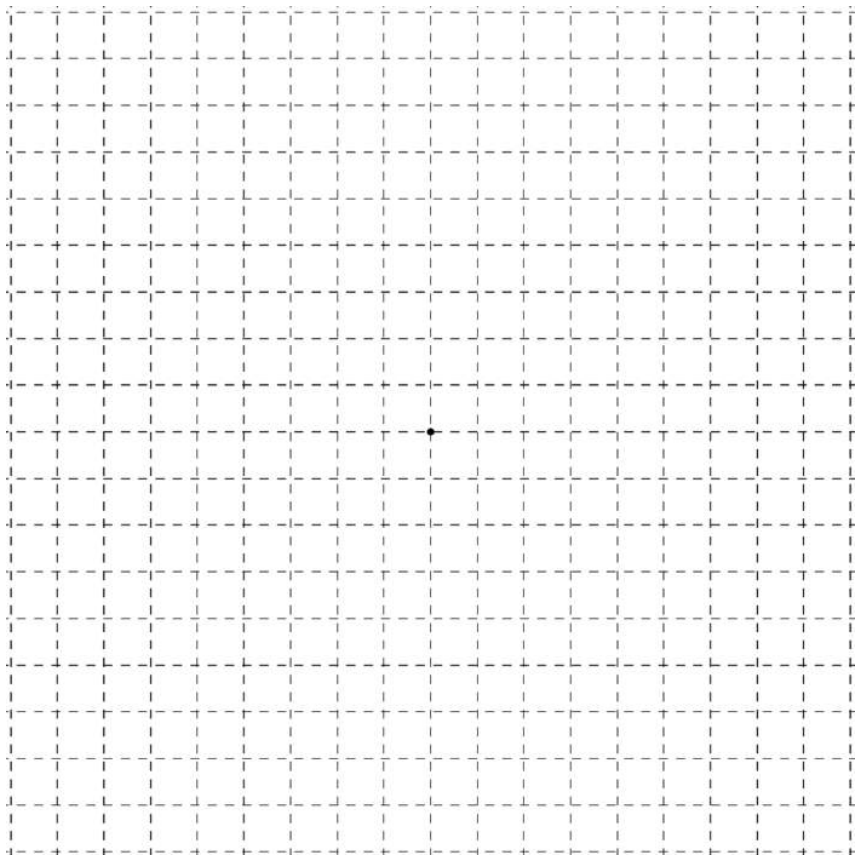


20. Δίνεται η συνάρτηση  $y = 2x$ .

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών.

<b>x</b>	-4	-2	0	2	4
<b>y</b>					

β) Να σχεδιάσετε ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και να παραστήσετε τα σημεία  $(x, y)$  του παραπάνω πίνακα.



γ) Να ενώσετε με γραμμές τα σημεία αυτά. Τι γραμμή σχηματίζεται;

.....

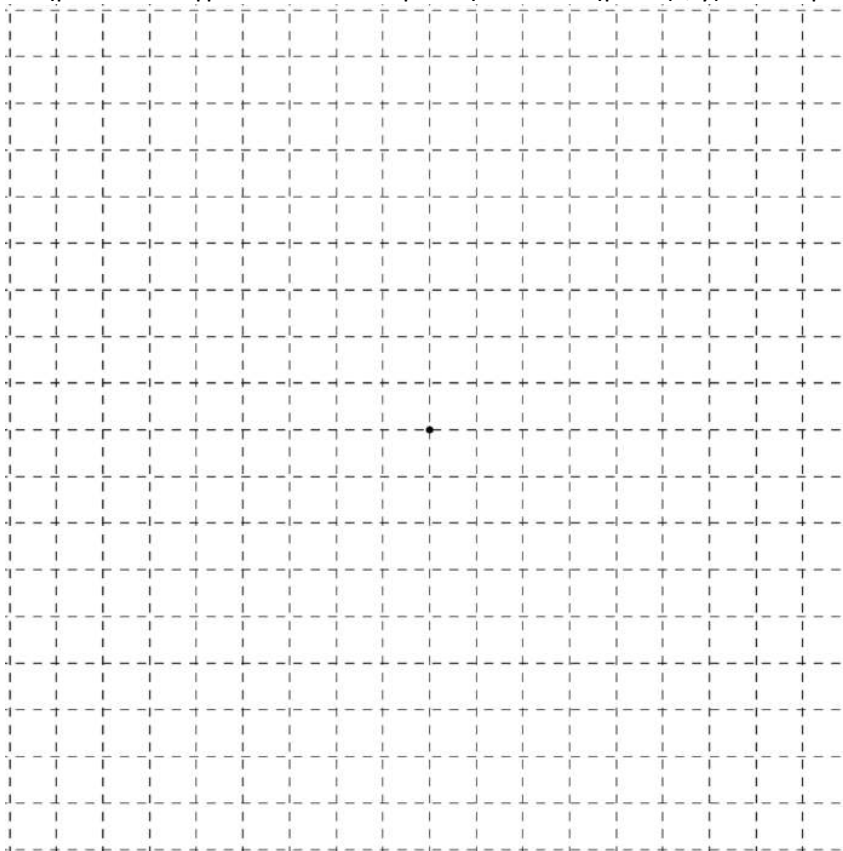
.....

21. Δίνεται η συνάρτηση  $y = \frac{1}{2}x^2$ .

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών.

<b>x</b>	-4	-2	0	2	4
<b>y</b>					

β) Να σχεδιάσετε σύστημα συντεταγμένων και να παραστήσετε τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα.



γ) Να ενώσετε με διακεκομμένη γραμμή τα σημεία αυτά. Τι γραμμή σχηματίζεται; .....

δ) Να επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα (α), (β) και (γ) για την ίδια συνάρτηση  $y = \frac{1}{2}x^2$ , χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα τιμών. Παραστήστε τα σημεία στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων όπως και προηγουμένως. Τι παρατηρείτε;

<b>x</b>	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
<b>y</b>									

ε) Τι γραμμή πιστεύετε ότι θα σχηματιστεί, αν χρησιμοποιήσουμε ένα πίνακα τιμών με πολλά περισσότερα ζεύγη τιμών; .....

22. Έχει διαπιστωθεί ότι το νερό της θάλασσας δεν έχει παντού την ίδια θερμοκρασία. Όσο πιο βαθιά κατεβαίνουμε, τόσο πιο κρύο γίνεται το νερό. Ένα ωκεανογραφικό σκάφος κάνει μετρήσεις θερμοκρασίας σε διάφορα βάθη στο βόρειο Αιγαίο, με τα εξής αποτελέσματα:

<b>x</b>	0	50	100	200	400
<b>T</b>	28	20	17	12	9

όπου T είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) η οποία μεταβάλλεται ως συνάρτηση του βάθους x (σε μέτρα).

- α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
- β) Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να εκτιμήσετε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρων.

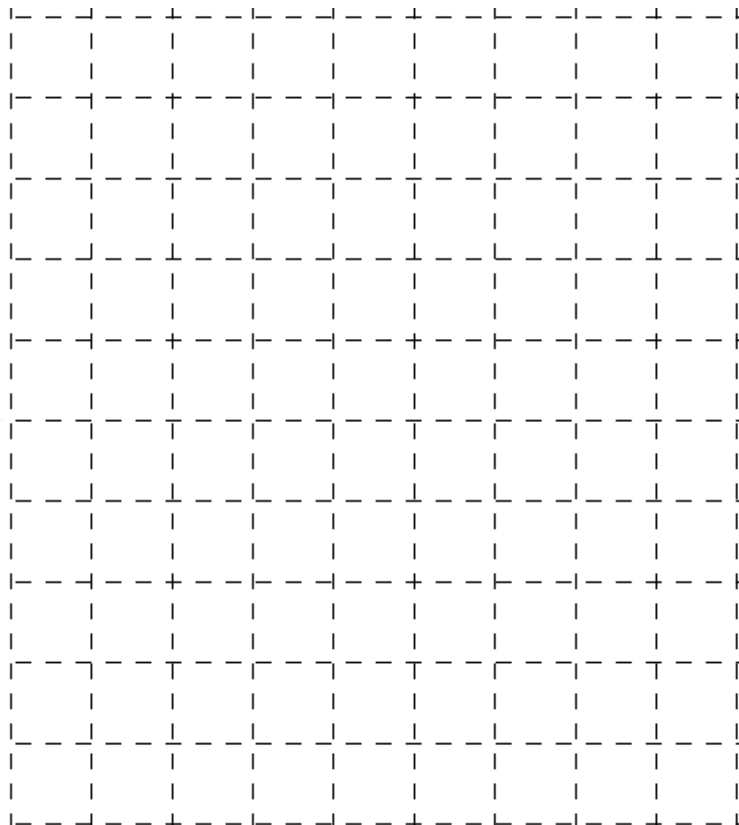
.....

.....

- γ) Σε ποιο βάθος από την επιφάνεια της θάλασσας η θερμοκρασία είναι 15° C;

.....

.....



### 3.3. Η συνάρτηση $y = ax$

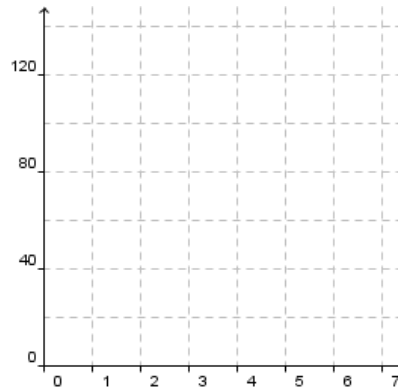


23. Καθώς παρακολουθούμε ένα κινηματογραφικό έργο, 24 διαφορετικά πλαίσια (καρέ) εμφανίζονται στην οθόνη κάθε δευτερόλεπτο. Μπορούμε να περιγράψουμε με τους ακόλουθους τρόπους την παραπάνω κατάσταση:

α) Πίνακας τιμών

<b>x: Πλήθος δευτερολέπτων</b>	1	2	3	4	5
<b>y: Πλήθος πλαισίων</b>					

β) Γραφική παράσταση



γ) Συνάρτηση  
 $y =$

Το πλήθος των πλαισίων είναι ανάλογο με τον αριθμό των δευτερολέπτων που έχει ήδη προβληθεί το κινηματογραφικό έργο.

Τα δύο ποσά λέμε ότι είναι ανάλογα.

24. Δίνονται τέσσερα τετράγωνα με πλευρές (σε cm) 0,5, 1, 1,5 και 2.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:


Πλευρά x	0,5	1	1,5	2
Περίμετρος y				
Λόγος $\frac{y}{x}$				


β) Τι παρατηρείτε; .....

γ) Να εκφράσετε την περίμετρο y ενός τετραγώνου ως συνάρτηση του μήκους x της πλευράς του.

25. Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mp6.ggb](http://mp6.ggb). Τι παρατηρείτε;

.....  
.....


 Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

 Στη συνάρτηση  $y = ax$ , όταν η μεταβλητή x έχει την τιμή 0, η τιμή της συνάρτησης είναι 0.

 Η κλίση της ευθείας  $y = ax$

Παρατηρούμε ότι στην ευθεία  $y = ax$  ο λόγος  $\frac{y}{x}$  είναι πάντα σταθερός και ίσος με α, δηλαδή:  
 $\frac{y}{x} = a$ , για  $x \neq 0$

Ο λόγος αυτός λέγεται **κλίση της ευθείας  $y = ax$** .

 Αν  $\omega$  είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με εξίσωση  $y = ax$  με τον άξονα x'x, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB ισχύει:

$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = a$$

Η κλίση α της ευθείας με εξίσωση  $y = ax$  είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$ , που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x'x.

**26.** Ένα πολυκατάστημα κάνει έκπτωση 20% σε όλα του τα είδη.

**α)** Πόση έκπτωση αναλογεί σ' ένα ζευγάρι παπούτσια το οποίο κοστίζει αρχικά 100 €; Ποια είναι η τιμή που θα το αγοράσουμε μετά την έκπτωση;

.....

.....

.....

.....

**β)** Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα, με τις τιμές διαφόρων ειδών του καταστήματος και να εξετάσετε αν είναι ανάλογα τα ποσά  $x$ ,  $y$  και τα ποσά  $x$ ,  $\omega$ .

Αρχική τιμή $x$	100	200	50	80	150
Έκπτωση $y$					
Τελική τιμή $\omega$					

**γ)** Να εκφράσετε τα ποσά  $y$  και  $\omega$  ως συναρτήσεις του  $x$ .

.....

.....

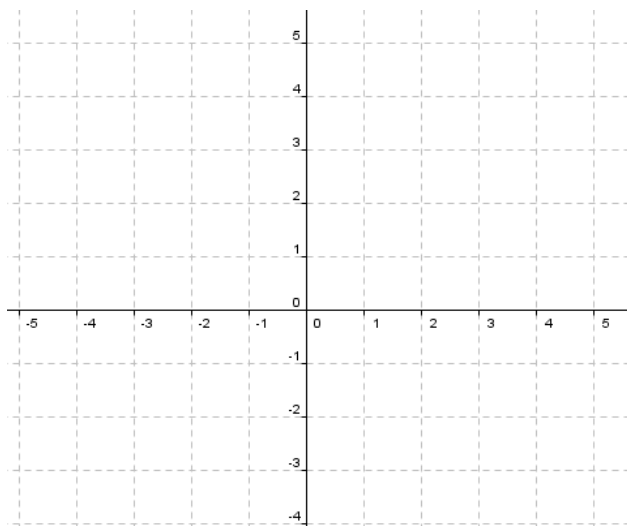
.....

.....



Για να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax$ , είναι απαραίτητο ένα ζεύγος σημείων, αφού το ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία είναι η αρχή των αξόνων  $(0, 0)$ .

**27.** Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε την ευθεία με εξίσωση  $y = -0,6x$ .



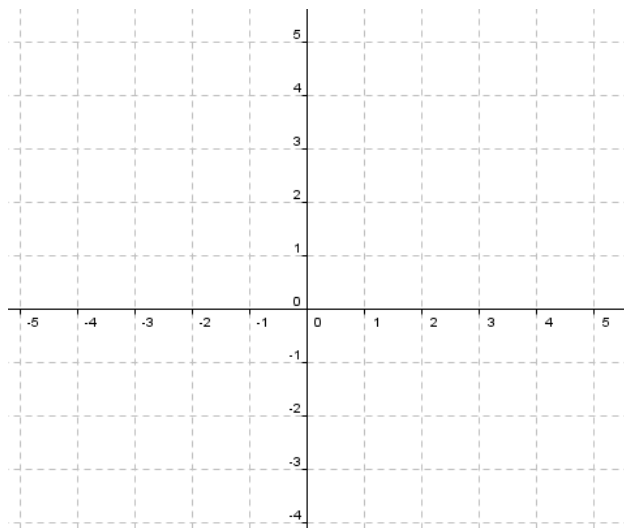
**28.** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής  $y = ax$ , διέρχεται από το σημείο  $(2, 1)$ . Ποια είναι η τιμή της σταθεράς  $a$ ;

.....

.....

.....

29. α) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις  $y = x$  και  $y = -x$ .



β) Ποια η κλίση των δύο ευθειών;

.....

.....

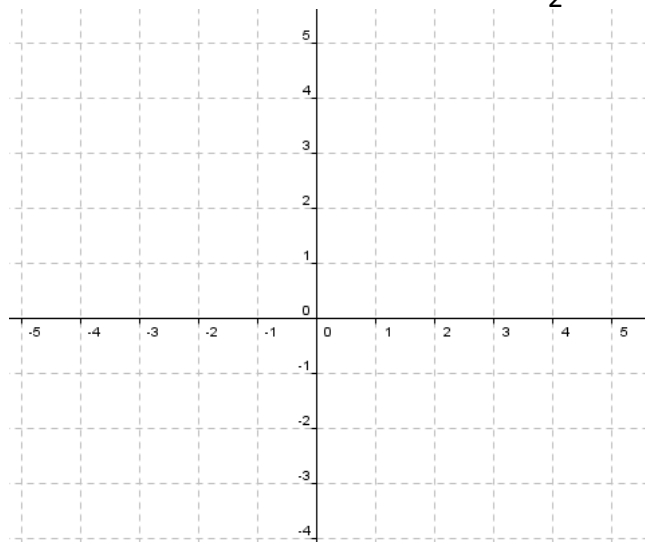
γ) Τι παρατηρείτε;

.....

.....

.....

30. α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 4x$ .



β) Τι παρατηρείτε;

.....

.....

.....



**31.** Να βρείτε την κλίση μιας ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή  $O$  των αξόνων και από το σημείο  $A (-3, 9)$ .

.....

.....

.....

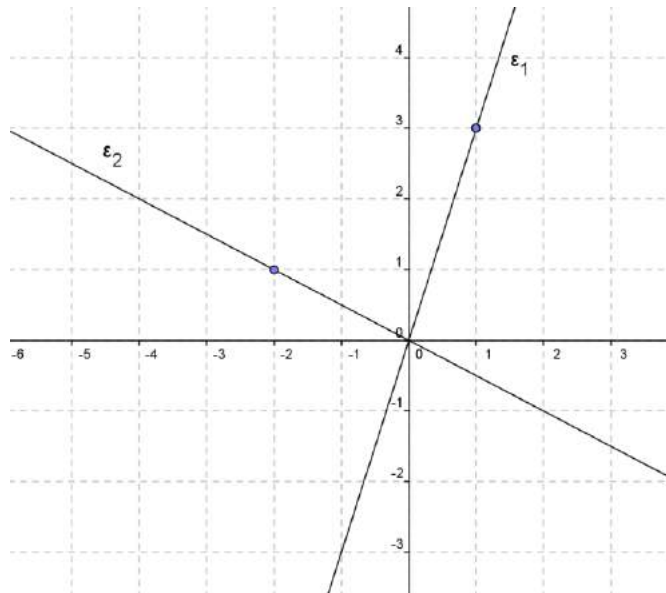
**32.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο  $A (3, 6)$ .

.....

.....

.....

**33.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  του παρακάτω σχήματος.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 3.4. Η συνάρτηση $y = ax + \beta$



**34. Το κινητό της Κατερίνας.** Η Κατερίνα έχει κινητό τηλέφωνο με χρέωση 0,9 € για κάθε λεπτό ομιλίας.

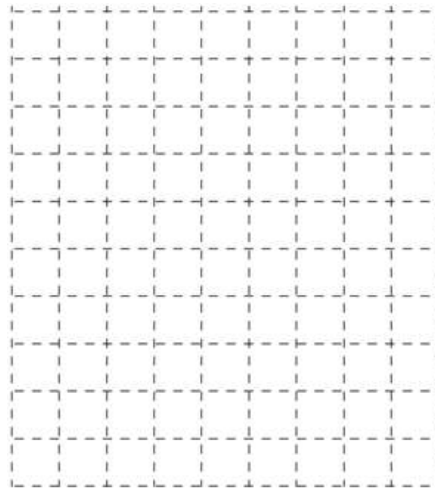
**α)** Αν ονομάσουμε  $x$  το χρόνο ομιλίας (σε λεπτά) και  $y$  το ποσό πληρωμής (σε €) που αντιστοιχεί, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος ομιλίας $x$	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής $y$					

**β)** Να εκφράσετε το  $y$  ως συνάρτηση του  $x$ .

.....

**γ)** Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.



**δ)** Η τηλεφωνική εταιρεία χρεώνει και 10 € πάγιο το μήνα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με το νέο ποσό πληρωμής  $y$  με την προσθήκη και των 10 €.

Χρόνος ομιλίας $x$	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής ομιλίας					
Πάγιο					
Συνολικό ποσό πληρωμής $y$					

**ε)** Να εκφράσετε το νέο ποσό πληρωμής  $y$  ως συνάρτηση του χρόνου ομιλίας  $x$ .

.....

.....

**στ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων.

**ζ)** Τι σχέση έχουν οι δύο αυτές γραφικές παραστάσεις;

.....

.....



Το πάγιο είναι κάτι σταθερό, μόνιμο που προστίθεται σε έναν λογαριασμό (π.χ. κινητής τηλεφωνίας) ανεξάρτητα από την κατανάλωση του συνδρομητή.



Η γραφική παράσταση της  $y = ax + \beta$ ,  $\beta \neq 0$  είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση  $y = ax$ , που διέρχεται από το σημείο  $(0, \beta)$  του άξονα  $y'y$ .

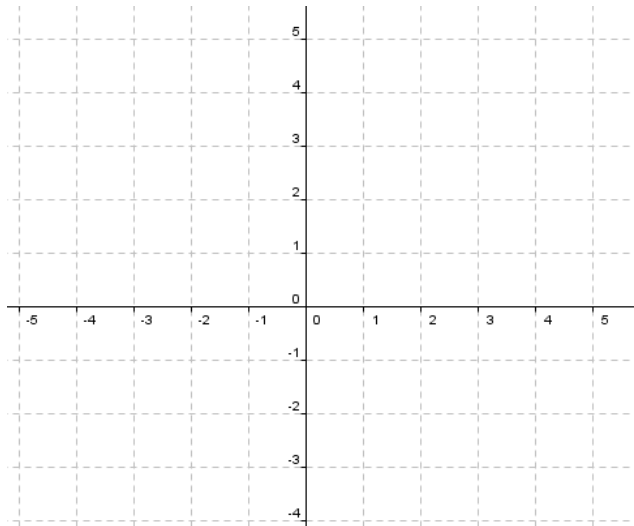
Ο αριθμός  $a$ , λέγεται και **κλίση της ευθείας**  $y = ax + \beta$ .

35. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α)  $y = -2x$

β)  $y = -2x + 3$

γ)  $y = -2x - 3$



δ) Τι παρατηρείτε; Εργαστείτε και στο μικροπείραμα [mp7.ggb](http://mp7.ggb)

.....

.....

.....

36. Η προσγείωση ενός αεροπλάνου. Η ταχύτητα (σε m/s) ενός αεροπλάνου που προσγειώνεται, από τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος μέχρι να σταματήσει, δίνεται από τη σχέση:  $u = 45 - 1,5 t$ , όπου  $t$  ο χρόνος που πέρασε από τη χρονική στιγμή που το αεροπλάνο άγγιξε το έδαφος.

α) Να βρείτε την ταχύτητά του τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος.

.....

.....

β) Να βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να σταματήσει το αεροπλάνο και να παραστήσετε γραφικά την ταχύτητά του  $u$  ως συνάρτηση του χρόνου  $t$ .

.....

.....

.....

.....

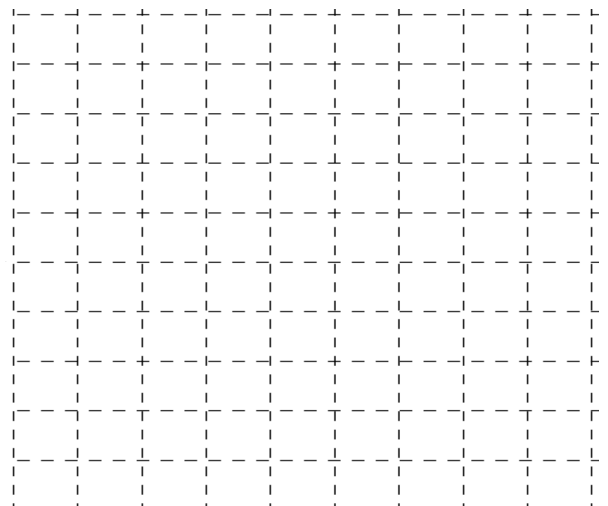
.....

.....

.....

.....

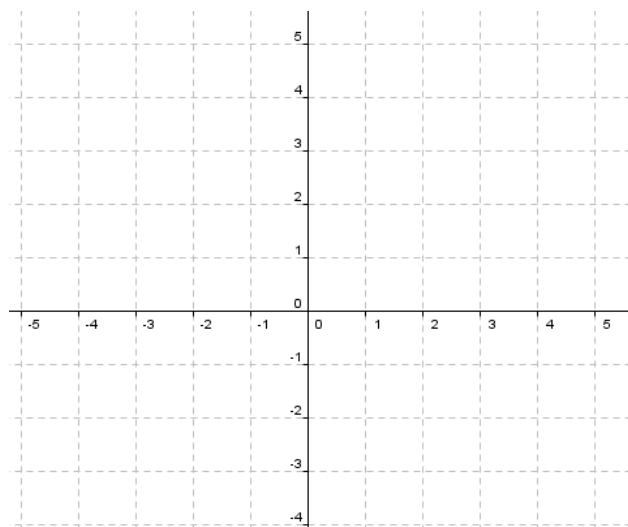
.....



37. Δίνεται η ευθεία  $y = 2x - 1$ .

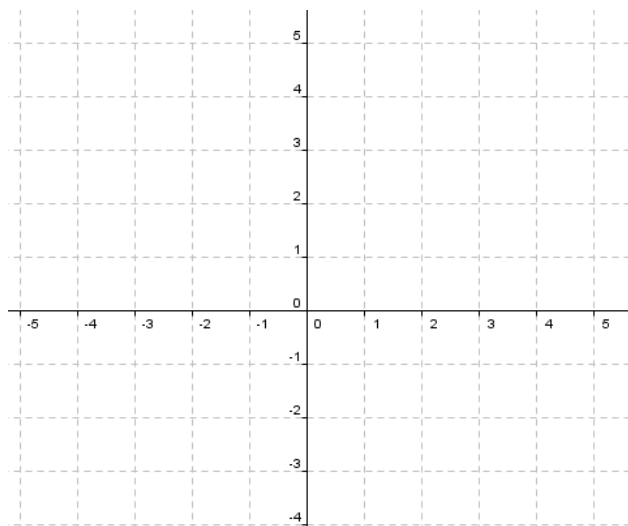
α) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση όταν το  $x$  είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....



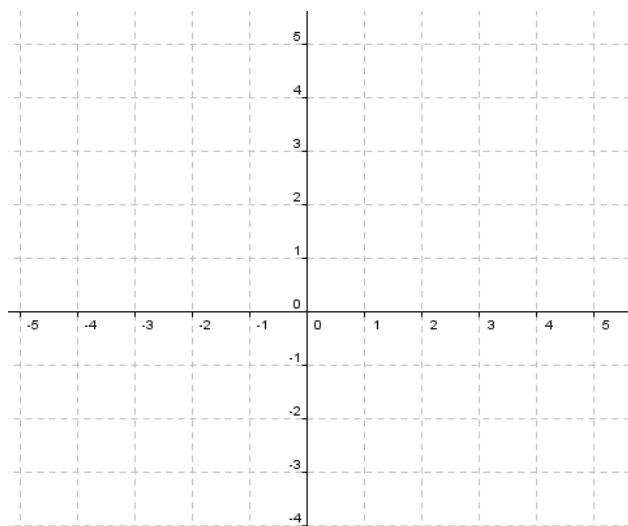
β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση όταν  $x \geq 1$ .

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....



γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση όταν  $-1 \leq x < 3$ .

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....



**38.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση 5 και διέρχεται από το σημείο  $M(2, -3)$ .

.....

.....

.....

.....

### 3.5. Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ , Η υπερβολή



Τα ποσά  $u$  και  $t$ , λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα**, γιατί όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιαστεί επί έναν αριθμό, τότε η τιμή του άλλου διαιρείται με τον αριθμό αυτό.



Όταν δύο ποσά  $x$  και  $y$  είναι **αντιστρόφως ανάλογα**, τότε το **γινόμενο** των αντιστοίχων τιμών τους είναι **σταθερό**.  
 Αν  $\alpha \neq 0$  είναι το σταθερό γινόμενο των  $x$  και  $y$ , τότε το  $y$  εκφράζεται ως συνάρτηση του  $x$  από τον τύπο  $y = \frac{\alpha}{x}$ .

39. Η απόσταση  $s$  δύο πόλεων είναι 60 χιλιόμετρα. Αν με  $t$  παραστήσουμε το χρόνο (σε ώρες) που χρειάζεται ο ποδηλάτης να διανύσει την απόσταση των δύο πόλεων:

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος $t$	1	2	4	10	20	30	60
Ταχύτητα $u$							
Απόσταση $s$	60	60	60	60	60	60	60

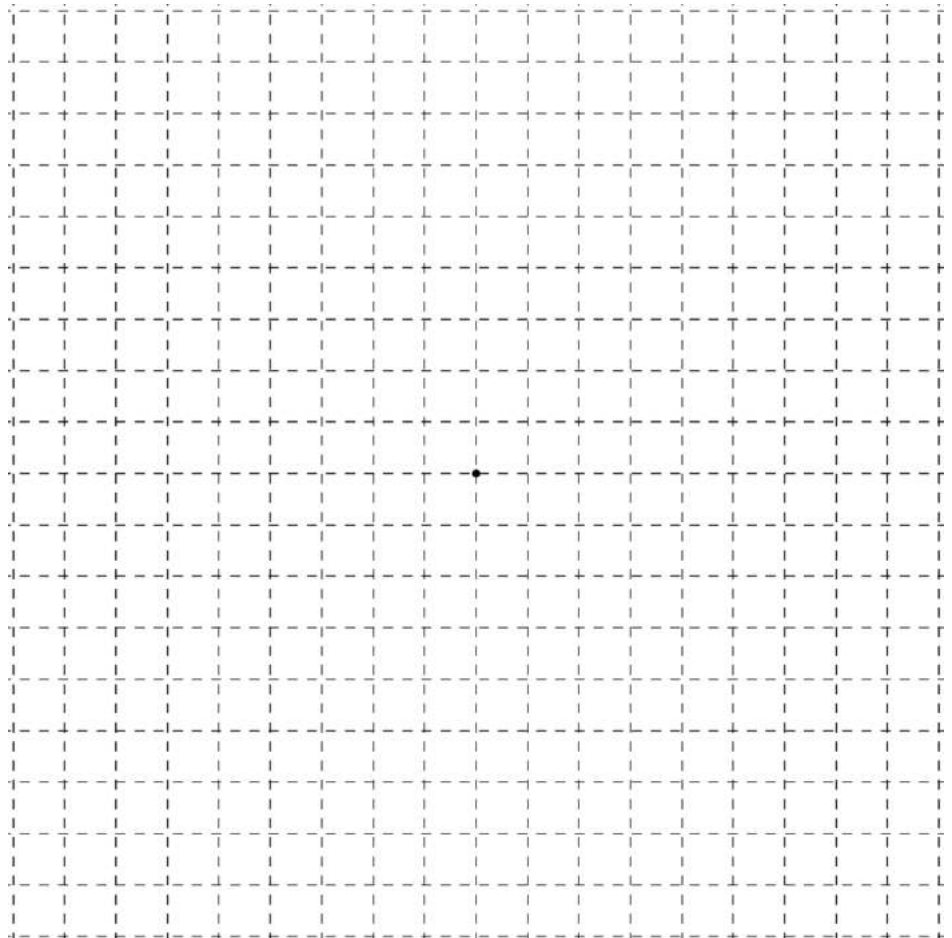
β) Τι παριστάνει το γινόμενο  $u \cdot t$ ;

.....  
 .....

γ) Να εκφράσετε την ταχύτητα  $u$  ως συνάρτηση του χρόνου  $t$ .

.....

δ) Χρησιμοποιήστε τις τιμές του πίνακα του ερωτήματος (α) για να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης.





Οι γραφικές παραστάσεις λέγονται **υπερβολές** και οι δύο γραμμές που τις συνθέτουν λέγονται **κλάδοι** της υπερβολής.

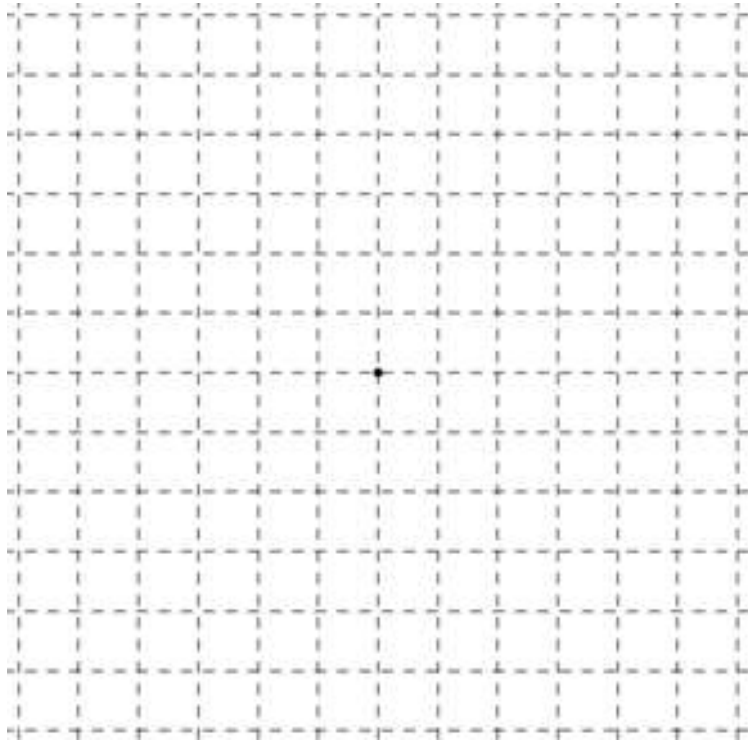


Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \frac{\alpha}{x}, x \neq 0$ , λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από **δύο κλάδους** που βρίσκονται: Στο **1ο** και στο **3ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν  $\alpha > 0$ . Στο **2ο** και στο **4ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν  $\alpha < 0$ .

**40. α)** Δίνεται η συνάρτηση  $y = \frac{3}{x}, x \neq 0$ .

Με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα τιμών να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

<b>x</b>	-3	-2	-1	1	2	3
<b>y</b>						



**β)** Να σχεδιάσετε στο παραπάνω σύστημα αξόνων, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

<b>x</b>	-3	-2	-1	1	2	3
<b>y</b>						

$$y = -\frac{3}{x}, x \neq 0$$

**41. α)** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις υπερβολές:

$$y = \frac{6}{x}, x \neq 0 \text{ και } y = -\frac{6}{x}, x \neq 0$$

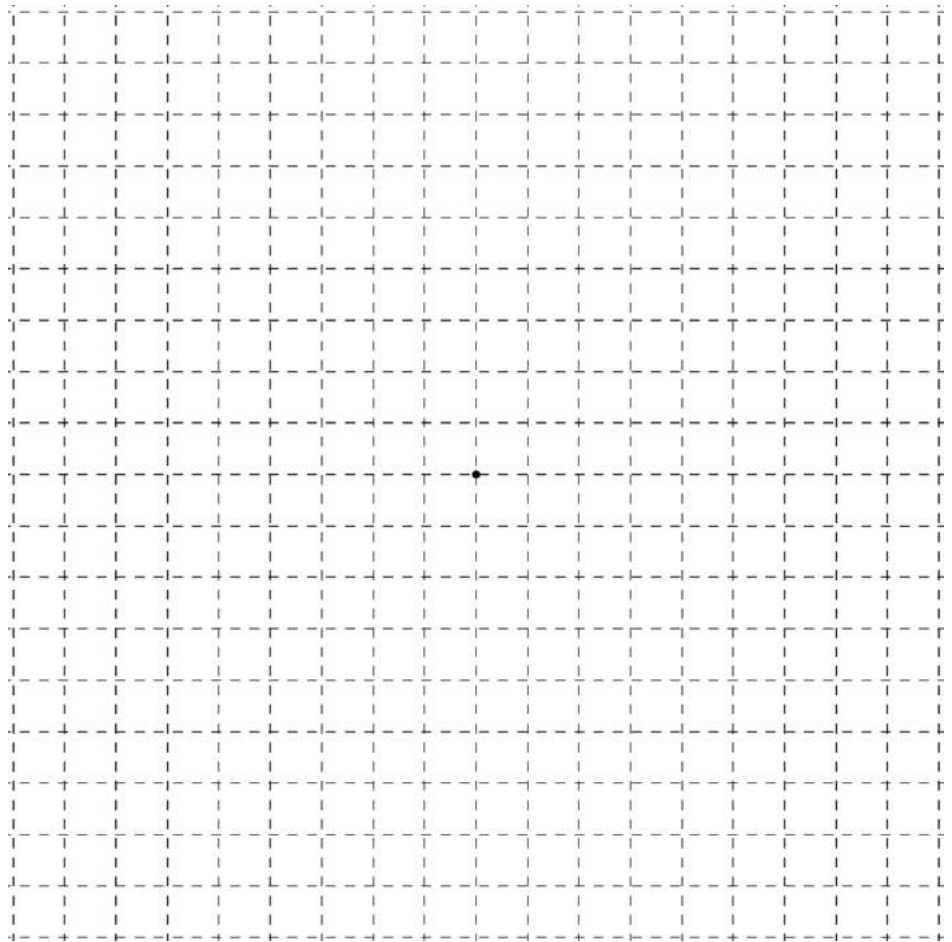
<b>x</b>	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$y = \frac{6}{x}$								

<b>x</b>	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$y = -\frac{6}{x}$								



Και στις δύο περιπτώσεις η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει:

- Κέντρο συμμετρίας την αρχή  $O$  των αξόνων.
- Άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις  $y = x$  και  $y = -x$ .



**β)** Ποιες είναι οι συμμετρίες που ισχύουν μεταξύ των κλάδων των παραπάνω υπερβολών;

.....

.....



## Ασκήσεις προς Λύση

### Η έννοια της συνάρτησης

1.1. Να γράψετε τις συναρτήσεις τις οποίες περιγράφουν οι παρακάτω προτάσεις:

- α) Το εμβαδόν  $E$  ενός τετραγώνου σε συνάρτηση με την πλευρά του  $x$ .
- β) Η περίμετρος  $\Pi$  ενός ορθογώνιου με μήκος 4 μονάδες και πλάτος  $a$  σε συνάρτηση με το πλάτος του.
- γ) Την ταχύτητα  $υ$  ενός αυτοκινήτου το οποίο σε χρόνο  $t$  έκανε διάστημα 15km σε συνάρτηση με το χρόνο.
- δ) Το υπόλοιπο  $\gamma$  του όγκου νερού, που μένει σε μια δεξαμενή, αν αρχικά υπήρχαν 500 λίτρα, τα οποία καταναλώνονται με ρυθμό 10 λίτρα την ημέρα, σε συνάρτηση με τις ημέρες  $x$ .
- ε) Ο νέος μισθός  $\gamma$  των υπαλλήλων μιας επιχείρησης όταν ο αρχικός μισθός  $x$  μειώθηκε κατά 125 € τον μήνα.

1.2. Δίνεται η συνάρτηση  $\gamma = 3x - 1$ . Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	1	2
γ					

1.3. Να εξετάσετε αν ο πίνακας τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
γ	8	2	0	2	8

μπορεί να είναι πίνακας τιμών της συνάρτησης:

- α)  $\gamma = 2x^2$
- β)  $\gamma = x^2$

1.4. Ένας οινοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό σταφύλια παράγει 0,4 λίτρα κρασί.

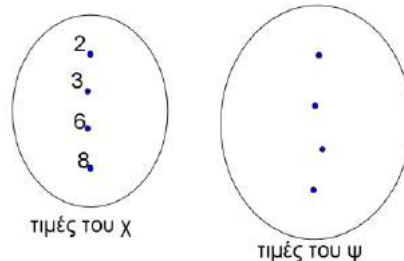
- α) Πόσα λίτρα κρασί θα πάρει από παραγωγή 700 κιλών σταφύλια;
- β) Να εκφράσετε την ποσότητα  $\gamma$  σε λίτρα του κρασιού, που θα πάρει, ως συνάρτηση της ποσότητας  $x$  των σταφυλιών που παράγει.
- γ) Πόσα κιλά σταφύλια πρέπει να παράγει, ώστε να πάρει 180 λίτρα κρασί;

1.5. Ένας μαθητής αγοράζει από ζαχαροπλαστείο πάστες. Κάθε πάστα κοστίζει 2,20 €.

- α) Να βρείτε πόσο θα πληρώσει αν αγοράσει 4 πάστες.
- β) Αν με  $x$  συμβολίσουμε τον αριθμό των παστών και με  $\gamma$  συμβολίσουμε τα χρήματα που πλήρωσε, να βρείτε μία σχέση που συνδέει τα  $x$  και  $\gamma$ .
- γ) Με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας

Αριθμός παστών $x$	3		5	
Χρήματα $\gamma$ €		8,8		13,2

- δ) Πριν γυρίσει στο σπίτι του αγοράζει από το σουβλατζίδικο της γειτονιάς του σουβλάκια και δύο αναψυκτικά. Κάθε σουβλάκι κοστίζει 1,5€ και ένα αναψυκτικό 1€.
  - i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.
  - ii) Να φτιάξετε πίνακα τιμών αν αγοράσει 2, 3, 6, 8 σουβλάκια.
  - iii) Αφού συμπληρώσετε τις τιμές του πίνακα, να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία του πρώτου στα στοιχεία του δεύτερου σχήματος.



1.6. Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης  $y = -x^2 + ax + \beta$  είναι ο παρακάτω:

X	-3	-2	0	1
y	4	1	-11	-20

Να βρείτε τα  $\alpha$  και  $\beta$ .

1.7. Η μίσθωση ενός ταξί κοστίζει 0,74 € ανά χιλιόμετρο διαδρομής και 1,29 € η πτώση της σημαίας.

α) Να υπολογίσετε πόσα χρήματα θα πληρώσουμε για μία διαδρομή 8 χιλιομέτρων.

β) Να βρείτε έναν τύπο ο οποίος να μας δίνει τα χρήματα  $y$  που θα πληρώσουμε αν η διαδρομή είναι  $x$  χιλιόμετρα.

γ) Αν η αξία μιας διαδρομής ήταν 9,8 €, πόσα χιλιόμετρα ήταν η διαδρομή;

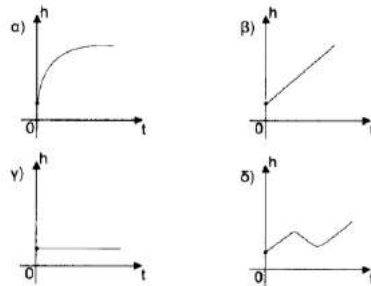
1.8. Ένα λεωφορείο πηγαίνει από την Θεσσαλονίκη στην Κομοτηνή με ταχύτητα 80 km/h. Η απόσταση Θεσσαλονίκη-Κομοτηνή είναι 247 km.

α) Να βρείτε έναν τύπο που να δίνει την απόσταση που απομένει για να φτάσει το λεωφορείο στην Κομοτηνή μετά από  $t$  ώρες ταξιδιού.

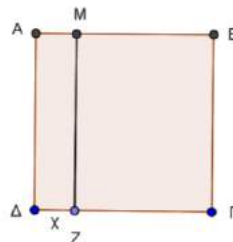
β) Για ποια τιμή του  $t$  θα έχει διανύσει το μισό της απόστασης;

γ) Σε πόσες ώρες θα φτάσει στην Κομοτηνή;

1.9. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα απεικονίζει το ύψος ενός ανθρώπου, ως συνάρτηση του χρόνου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



1.10. Το τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος έχει μήκος πλευράς 8 cm.



α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΖΓΒΜ, ως συνάρτηση του  $x$ .

β) Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή  $x$ ;

γ) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών.

Μεταβλητή $x$	1		7
Εμβαδόν ΖΓΒΜ		64	

δ) Για ποια τιμή του  $x$  το εμβαδόν είναι  $25 \text{ cm}^2$ ;

1.11. Μία δεξαμενή νερού όγκου  $1000 \text{ m}^3$  αδειάζει με ρυθμό  $20 \text{ m}^3$  την ημέρα.

α) Να βρείτε πόσο θα είναι το νερό στη δεξαμενή μετά από 12 ημέρες.

β) Να βρείτε έναν τύπο που να μας δίνει τον όγκο του νερού στη δεξαμενή μετά από  $t$  ημέρες.

γ) Μετά από πόσες ημέρες θα αδειάσει η δεξαμενή;

1.12. Ένας γεωργός καλλιεργεί  $500 \text{ m}^2$  ενός αγρού εκτάσεως 3 στρεμμάτων σε μια ώρα.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν  $E$  της επιφάνειας που καλλιεργεί ως συνάρτηση του χρόνου  $t$ .

β) Να βρείτε πόσες ώρες πρέπει να εργαστεί με τον ίδιο ρυθμό ο γεωργός για να τελειώσει τον αγρό αυτό.

**1.13.** Δίνεται η ισότητα  $y^2 = x^2 - 9$

**α)** Να υπολογίσετε την τιμή του  $y$  για  $x = 3$  και για  $x = -3$ .

**β)** Να υπολογίσετε τις τιμές του  $x$  για  $y = 0$ .

**γ)** Αυτή η ισότητα εκφράζει, ως προς  $y$ , μια συνάρτηση; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**1.14.** Δίνεται η συνάρτηση  $y=2^x - x$ . Να κάνετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης αν ο  $x$  είναι ακέραιος και  $-3 < x < 3$ .

**1.15.** Δίνεται η συνάρτηση  $y = f(x)$  όπου  $f(x) = -3x$ . Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $A = \frac{2f(-1) - 3f(2)}{f(0) + 2f(1)}$

**1.16.** Δίνεται η συνάρτηση  $y = 3(x + 2) - 2x$

**α)** Να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης για  $x = 0$  και για  $x = -2$ .

**β)** Να υπολογίσετε την τιμή του  $x$  για την οποία η τιμή της συνάρτησης είναι 1.

**1.17.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f(x) = -2x + 4$  και  $g(x) = 5x - 2$ .

**α)** Να υπολογίσετε την παράσταση  $A = f(0) \cdot g(1) - f(1/2)$ .

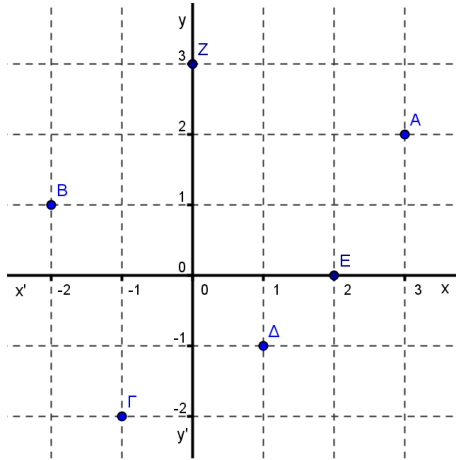
**β)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

**1.18.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $y = \frac{5x-1}{4}$  και  $z = \frac{2x+3}{5}$ . Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

<b>x</b>	0				
<b>y</b>		1	-4		
<b>z</b>				3	-1

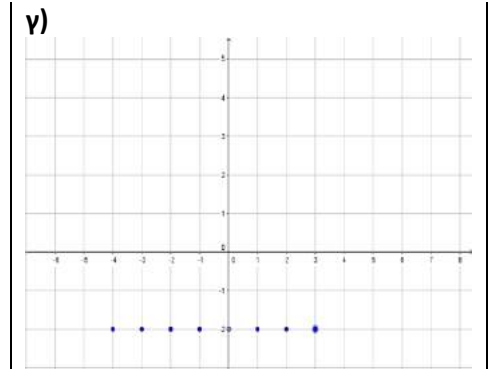
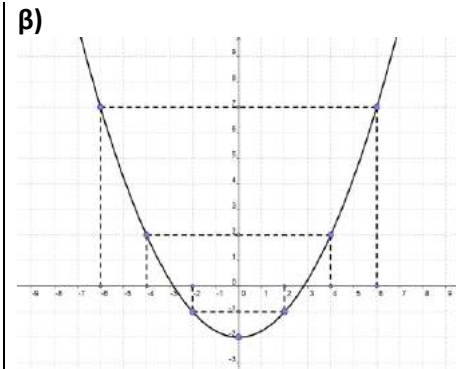
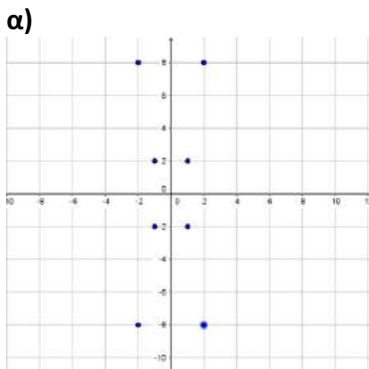
### Καρτεσιανές Συντεταγμένες-Γραφική Παράσταση

- 1.19. α)** Στο ακόλουθο σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων που είναι σημειωμένα:  $A(\dots, \dots)$ ,  $B(\dots, \dots)$ ,  $\Gamma(\dots, \dots)$ ,  $\Delta(\dots, \dots)$ ,  $E(\dots, \dots)$ ,  $Z(\dots, \dots)$   
**β)** Να σχεδιάσετε στο διπλανό σχήμα τα σημεία  $K(1,-2)$ ,  $M(-3,-1)$ ,  $P(-1,0)$  και  $\Lambda(0,2)$ .



- 1.20.** Σε κατάλληλο σύστημα αξόνων να τοποθετήσετε τα σημεία  $A(2, 50)$ ,  $B(-1, 100)$ ,  $\Gamma(3, 150)$ ,  $\Delta(-2, 200)$ .

- 1.21.** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών γραφημάτων. Να εξετάσετε κατά πόσο τα γραφήματα ορίζουν συνάρτηση.



- 1.22.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $A(5, 1)$ ,  $B(5, 7)$ ,  $\Gamma(2, 4)$ , είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

- 1.23.** Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Σημείο	Συμμετρικό του ως προς τον $x'$	Συμμετρικό του ως προς τον $y'$	Συμμετρικό του ως προς το $O$
$(-2, 1)$			
$(3, -3)$			
$(0, 4)$			
$(-1, 0)$			

1.24. Δίνεται η συνάρτηση  $y = -\frac{1}{2}x^2$ .

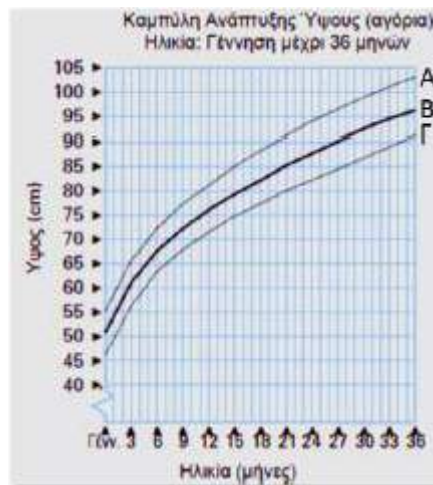
α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x	-4		-1	0		2	
y		-2			$\frac{1}{2}$		-8

β) Τα σημεία του πίνακα που θα προκύψουν να τα αναπαραστήσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

γ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

1.25. Στο βιβλιάριο υγείας κάθε παιδιού υπάρχει το πιο κάτω διάγραμμα που παρουσιάζει τη φυσιολογική ανάπτυξη ενός αγοριού από τη γέννησή του μέχρι τους 36 μήνες της ηλικίας του. Όταν το ύψος του παιδιού, καθώς μεγαλώνει, βρίσκεται μεταξύ των καμπυλών Α και Γ, τότε η ανάπτυξη του παιδιού θεωρείται φυσιολογική.



α) Τι ύψος πρέπει να έχει ένα παιδί στους 18 μήνες, ώστε να θεωρείται η ανάπτυξή του φυσιολογική;

β) Να μελετήσετε τον πιο κάτω πίνακα και να εξηγήσετε κατά πόσο η ανάπτυξη ενός παιδιού, με βάση τις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις, ήταν φυσιολογική.

Μήνας	Γέννηση	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ύψος	53	57	60	65	70	73	76	78	79	80	81	82	83	84

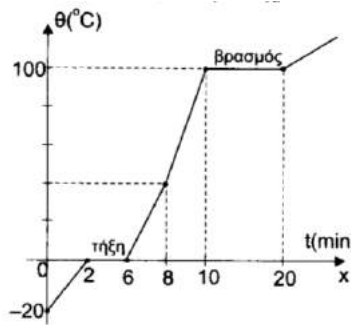
1.26. Σ' ένα σύστημα αξόνων παίρνουμε τα σημεία Α(-3, -1), Β(-1, 1), Γ(-1, 2) και Δ(-3, 2).

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του.

1.27. Δίνονται τα σημεία Α(0, -2) και Β(-3, 5). Να βρείτε την απόσταση κάθε ενός σημείου από τους άξονες και από την αρχή των αξόνων.

- 1.28.** Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας μιας ποσότητας νερού σε συνάρτηση με το χρόνο. Το νερό είναι αρχικά πάγος, που θερμαίνεται σταθερά. Στη συνέχεια ο πάγος λιώνει (τήξη), το νερό παίρνει υγρή μορφή, στη συνέχεια βράζει και καταλήγει στην αέρια μορφή (ατμός). Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας του νερού ως προς το χρόνο.



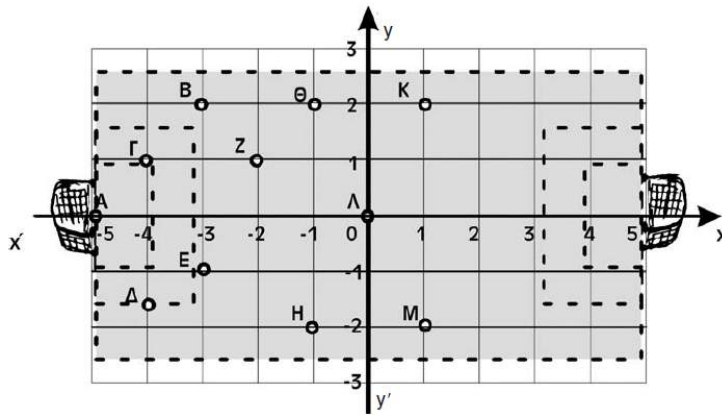
Να βρείτε:

- α)** Ποια χρονική στιγμή αρχίζει να λιώνει ο πάγος;  
**β)** Ποια χρονική στιγμή έχει γίνει ατμός όλο το νερό;  
**γ)** Πόσο χρόνο διαρκεί το βράσιμο του νερού;  
**δ)** Ποια είναι η θερμοκρασία του πάγου;  
**ε)** Ποια είναι η θερμοκρασία του νερού τη χρονική στιγμή  $t = 8 \text{ min}$ ;  
**στ)** Πόσο χρόνο είχαμε μόνο πάγο και πόσο μόνο νερό, σε υγρή μορφή;
- 1.29. α)** Αν  $A(3κ-18, 9)$ , να βρείτε την τιμή του  $κ$  έτσι ώστε το σημείο  $A$  να ανήκει στον άξονα  $y'y$ .  
**β)** Αν  $B(5, -4λ+2)$ , να βρείτε την τιμή του  $λ$  ώστε το σημείο  $B$  να ανήκει στον άξονα  $x'x$ .
- 1.30.** Έστω το σημείο  $M(4+2κ, -κ+5)$ , να βρείτε το  $κ$  ώστε το σημείο  $M$  να ανήκει:  
**α)** στο 1ο τεταρτημόριο  
**β)** στο 4ο τεταρτημόριο
- 1.31.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = -2x^2$  όταν:  
**α)**  $-2 \leq x \leq 2$  και  $x$  ακέραιος  
**β)**  $-2 \leq x \leq 2$  και  $x$  πραγματικός.
- 1.32.** Αν είναι  $α < 0$  και  $β < 0$ , να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκονται τα σημεία:  $A(-α, β)$ ,  $B(α, β)$ ,  $Γ(-α, -β)$ ,  $Δ(α, -β)$ .
- 1.33.** Η αντιστοιχία μεταξύ μερικών τιμών της θερμοκρασίας μετρούμενης στην κλίμακα Κελσίου και στην κλίμακα Φαρενάιτ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Βαθμοί Κελσίου C	0	5	20	30
Βαθμοί Φαρενάιτ F	32	41	68	86

- α)** Αν ξέρετε ότι η συνάρτηση βαθμοί Κελσίου–βαθμοί Φαρενάιτ έχει γραφική παράσταση ευθεία γραμμή, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής  
**β)** Να βρείτε, από την γραφική παράσταση, πόση είναι η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου, αν σε βαθμούς Φαρενάιτ είναι  $77^\circ \text{ F}$ .  
**γ)** Να βρείτε, από τη γραφική παράσταση, πόση είναι η θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ, αν σε βαθμούς Κελσίου είναι  $10^\circ \text{ C}$ .

**1.34.** Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις των παικτών μιας ομάδας. Ο προπονητής δίνει τις τελευταίες οδηγίες στους παίκτες. Τους εμπνυχώνει και εξηγεί τη θέση του καθενός. Για να γίνει πιο κατανοητός, δείχνει στους παίκτες ένα σχεδιάγραμμα με δύο καθέτους άξονες  $x'x$  και  $y'y'$ , οι οποίοι διέρχονται από το κέντρο του γηπέδου. Έχει χωρίσει μάλιστα τους άξονες σε ίσα διαστήματα με μήκος 1 cm στο σχεδιάγραμμα, αλλά στην πραγματικότητα κάθε cm αντιστοιχεί σε 10 m. Για να καλύψει καλύτερα τη θέση του καθενός χρησιμοποιεί δύο αριθμούς.



**α)** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις θέσεις και των 11 παικτών.

Παίκτης	Τετμημένη $x$	Τεταγμένη $y$	Συντεταγμένες $(x, y)$
B	-3	2	$(-3, 2)$
K			
E			
Γ			
Δ			
Z			
H			
Θ			
Λ			
M			
A			

**β)** Ο προπονητής δίνει εντολή στον παίκτη Μ να κινείται τρία τετράγωνα μπροστά, όταν επιτίθεται η ομάδα και δύο τετράγωνα πίσω, όταν αμύνεται. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των θέσεων στις οποίες πρέπει να βρίσκεται ο παίκτης  $\sigma'$  αυτές τις περιπτώσεις;

**γ)** Ο προπονητής δίνει εντολή στον παίκτη Ε να τροφοδοτεί, αν μπορεί τον παίκτη Κ με μακρινές διαγώνιες μπαλιές. Χρησιμοποιήστε το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζουν οι παίκτες Ε, Β και Κ για να υπολογίσετε τις αποστάσεις μεταξύ των τριών αυτών παικτών.

**1.35.** Έστω τα σημεία  $A\left(x-1, \frac{3y-2}{2}-y\right)$  και  $B\left(\frac{2x+1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1-y}{2}\right)$ . Να υπολογίσετε τις τιμές των  $x$  και  $y$  ώστε τα σημεία Α και Β συμπίπτουν.

**1.36. α)** Αν τα σημεία  $A(-\lambda+1, -3)$  και  $B(2\lambda-4, -3)$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $y'y'$ , να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda$ .

**β)** Αν τα σημεία  $K(-2\kappa+1, -4)$  και  $L(5, 3\mu-2)$  είναι συμμετρικά ως προς την αρχή Ο, να υπολογίσετε τις τιμές των  $\kappa$  και  $\mu$ .

**γ)** Να υπολογίσετε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε τα σημεία  $M(-2\alpha+1, -3)$  και  $P(-2, -\beta+5)$  να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x'x$ .

## Η συνάρτηση $y = ax$

**1.37** Οι τιμές  $x = 4$  και  $y = 12$  είναι τιμές των ανάλογων ποσών  $x$  και  $y$ . Ποιος από τους παρακάτω τύπους εκφράζει το  $y$  ως συνάρτηση του  $x$ ;

A.	$y = \frac{1}{3}x$	B.	$y = -3x$	Γ.	$y = -\frac{1}{3}x$	Δ.	$y = 3x$
----	--------------------	----	-----------	----	---------------------	----	----------

**1.38.** Δίνονται οι παρακάτω πίνακες τιμών δύο ποσών:

x	3	9	2,4	-12	0,63	126
y	1	3	0,8	-4	0,21	42

x	1	2	4	6	8	10
y	2	4	12	9	10	12

Να εξετάσετε αν τα ποσά αυτά είναι ανάλογα. Στην περίπτωση που είναι να εκφράσετε το  $y$  ως συνάρτηση του  $x$ .

**1.39.** Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $y = \frac{1}{2}x$   $y = -2x$ .

**1.40.** Τα ποσά  $x$  και  $y$  του ακόλουθου πίνακα είναι ανάλογα

**α)** Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα ποσά  $x$  και  $y$

**β)** Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	3	9		
y	4		16	24

**γ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της σχέσης, θεωρώντας ότι τα  $x, y$  είναι πραγματικοί αριθμοί.

**1.41.** Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο  $M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

**α)** Να σχεδιάσετε την ευθεία.

**β)** Να βρείτε την εξίσωση της συνάρτησης που παριστάνει την παραπάνω ευθεία.

**1.42.** Για ποια τιμή του  $\lambda$ , η συνάρτηση με εξίσωση  $y = -2x + 3\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$  είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

**1.43.** Να υπολογίσετε την τιμή του  $a$  ώστε η ευθεία με εξίσωση  $y = (a^2 + 1)x$  να διέρχεται από το σημείο  $\Gamma(2,2)$ .

**1.44.** Μία επιχείρηση έκανε μείωση στις αποδοχές των υπαλλήλων της κατά 7%.

**α)** Να βρείτε τη σχέση που μας δίνει τις νέες αποδοχές  $y$  συναρτήσει των παλαιών αποδοχών  $x$ .

**β)** Ένας υπάλληλος είχε παλιές αποδοχές 1050€. Ποιες θα είναι οι νέες αποδοχές;

**γ)** Ένας υπάλληλος έχει νέες αποδοχές 1069,5€. Ποιες ήταν οι παλιές αποδοχές;



**1.45.** Δίνεται ένα τετράγωνο πλευράς  $x$ . Έστω  $E$  το εμβαδόν και  $\Pi$  η περίμετρος του τετραγώνου.

**α)** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

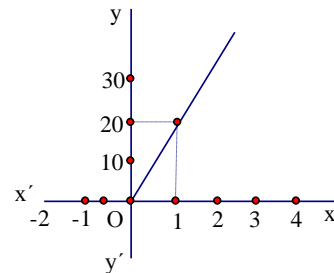
Πλευρά $x$	1	2	3	4
Εμβαδόν $E$				
Περίμετρος $\Pi$				

**β)** Η πλευρά  $x$  και το εμβαδόν  $E$  είναι ποσά ανάλογα;

**γ)** Η πλευρά  $x$  και η περίμετρος  $\Pi$  είναι ποσά ανάλογα;

**δ)** Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων να τοποθετήσετε τα σημεία  $(x, E)$  και  $(x, \Pi)$  του πίνακα τιμών του ερωτήματος (α). Τα σημεία  $(x, E)$  ή τα  $(x, \Pi)$  βρίσκονται στην ίδια ευθεία; Ποια είναι η συνάρτηση αυτής της ευθείας;

**1.46.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η κατανάλωση  $x$  σε λίτρα καυσίμων από ένα όχημα σε σχέση με το διάστημα  $y$  σε χιλιόμετρα που διανύει το όχημα. Να βρείτε πόσα λίτρα θα καταναλώσει για ένα διάστημα 510 χιλιομέτρων.



**1.47.** Δίνεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά  $x$ . Έστω  $u$  το ύψος του τριγώνου.

**α)** Να εκφράσετε το ύψος του τριγώνου σε συνάρτηση με την πλευρά του  $x$ .

**β)** Το  $u$  και το  $x$  είναι ποσά ανάλογα; Ποιος είναι ο σταθερός λόγος των τιμών τους;

**γ)** Ποιες είναι οι αντίστοιχες τιμές για το  $u$  αν το  $x$  πάρει τις τιμές  $\sqrt{3}$ ,  $2\sqrt{3}$ , 2.

**1.48.** Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει περίμετρο 22 cm. Έστω  $\alpha$  cm είναι το μήκος καθεμιάς από τις ίσες πλευρές του και  $\beta$  cm το μήκος της βάσης. Να υπολογίσετε τους αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$  αν γνωρίζετε ότι είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 3 και 5 αντίστοιχα.

**1.49.** Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα νησί A με προορισμό ένα νησί B και με ταχύτητα 25 ναυτικά μίλια την ώρα. Ο καπετάνιος του πλοίου μετρώντας την απόσταση των νησιών σε έναν ναυτικό χάρτη κλίμακας  $\frac{1}{1000000}$  διαπιστώνει ότι η απόσταση τους είναι 9,26 cm. Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο το πλοίο θα φτάσει στο νησί B; (Σημ.: 1 ναυτικό μίλι = 1,852 km.)

**1.50.** Αν από 3 κιλά σταφύλια παράγονται 1,2 κιλά κρασί,

**α)** να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Βάρος σταφυλιών $x$ (σε Kg)	3		400	0,6		1000
Βάρος κρασιού $y$ (σε Kg)	1,2	2,8			240	

**β)** Να βρείτε τον τύπο που εκφράζει την μεταβλητή  $y$  με την μεταβλητή  $x$ .

**γ)** Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της σχέσης από το ερώτημα β).

**1.51.** Ο Φ.Π.Α. στην τιμή πώλησης ειδών ένδυσης είναι 23 %.

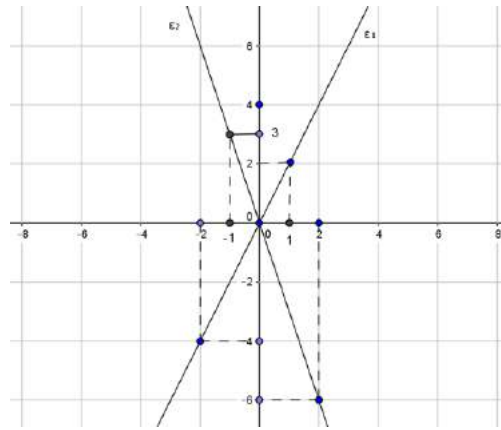
**α)** Πόσο θα πληρώσουμε για ένα σακάκι αξίας 105 €;

**β)** Να εκφράσετε τον Φ.Π.Α.  $y$  συναρτήσει της τιμής  $x$  των ειδών ένδυσης.

**γ)** Να εξετάσετε αν τα ποσά  $x$  και  $y$  είναι ανάλογα.

**1.52.** Η κλίμακα ενός χάρτη είναι 1:500.000. Να βρείτε την απόσταση δύο πόλεων στο χάρτη αν η πραγματική απόσταση είναι 70 km.

**1.53.** Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τις εξισώσεις των ευθειών  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ . Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών.

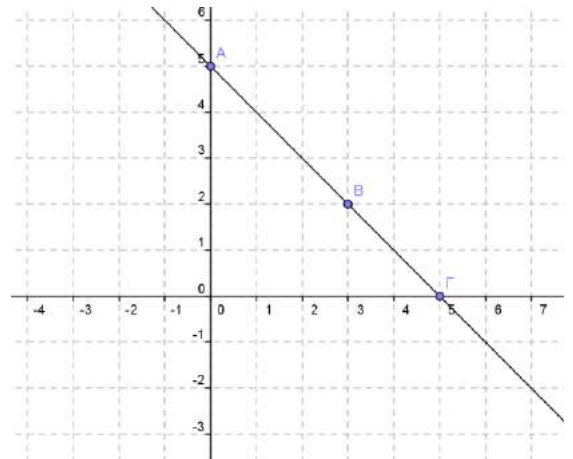


## Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

- 1.54.** Δίνεται η ευθεία με εξίσωση  $y = -x + 3$ , η οποία διέρχεται από το σημείο  $M(1-\lambda, 2\lambda+3)$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $M$ .
- 1.55.** Δίνεται η συνάρτηση  $y = -ax + 1$ .
- Να υπολογίσετε την τιμή του  $a$  ώστε η γραφική παράστασή της να διέρχεται από το σημείο  $A(-2, 3)$ .
  - Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση.
  - Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.
- 1.56.** Δίνεται η ευθεία  $\epsilon: y = ax + \beta$  και η ευθεία  $\delta: y = 2x - 1$ . Οι ευθείες ( $\epsilon$ ) και ( $\delta$ ) είναι παράλληλες. Η ευθεία ( $\epsilon$ ) διέρχεται από το σημείο  $M(-1, 1)$ .
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ( $\epsilon$ ).
  - Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας ( $\epsilon$ ).
- 1.57.** Έστω η ευθεία  $y = \frac{1}{2}x - 1$ .
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $A$  και  $B$  στα οποία τέμνει τους άξονες  $x'$  και  $y'$  η ευθεία.
  - Να κάνετε τη γραφική παράσταση.
  - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$  ( $O =$  η αρχή των αξόνων).
- 1.58.** Έστω η ευθεία με εξίσωση  $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ .
- Να υπολογίσετε την κλίση της ευθείας.
  - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας.
  - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο περικλείεται από την ευθεία και τους άξονες.
- 1.59.** Να υπολογίσετε τα  $a$  και  $\beta$  ώστε η ευθεία  $y = ax + \beta$  να τέμνει τους άξονες στα σημεία  $A(-1, 0)$  και  $B(0, 2)$ .
- 1.60.** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $y = 2x$ ,  $y = 2x - 1$ ,  $y = 2x + 3$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.
- 1.61.** Ο Κώστας έχει κινητό τηλέφωνο με χρέωση 0,7 ευρώ για κάθε λεπτό ομιλίας. Ονομάζουμε  $x$  το χρόνο ομιλίας (σε λεπτά) και  $y$  το ποσό πληρωμής (σε ευρώ) που αντιστοιχεί.
- Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:
- |                               |   |   |   |   |    |
|-------------------------------|---|---|---|---|----|
| $x$ χρόνος ομιλίας (σε λεπτά) | 1 | 2 | 5 | 8 | 10 |
| $y$ ποσό πληρωμής (σε ευρώ)   |   |   |   |   |    |
- Να εκφράσετε το  $y$  ως συνάρτηση του  $x$ .
  - Η τηλεφωνική εταιρεία χρεώνει και 10 ευρώ πάγιο το μήνα. Να εκφράσετε το νέο ποσό πληρωμής  $y$  ως συνάρτηση του χρόνου ομιλίας  $x$ .
  - Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων.
- 1.62.** Η εξίσωση  $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$  μας δείχνει τη σχέση η οποία συνδέει την θερμοκρασία  $y$  σε βαθμούς Κελσίου με την θερμοκρασία  $x$  σε βαθμούς Φαρενάιτ. Είναι γνωστό ότι το νερό παγώνει στους 0 βαθμούς Κελσίου και βράζει στους 100 βαθμούς Κελσίου. Να υπολογίσετε στους πόσους βαθμούς Φαρενάιτ παγώνει και βράζει το νερό.
- 1.63.** Ένας εμπορικός αντιπρόσωπος έχει μηνιαίο μισθό 900 € και προσαύξηση 5% επί των πωλήσεων.
- Να βρείτε το μηνιαίο μισθό  $y$  συναρτήσει των πωλήσεων  $x$ .
  - Πόσες πρέπει να είναι οι πωλήσεις ώστε ο μηνιαίος μισθός να είναι 1100 €.

- 1.64.** Το σουβλατζίδικο της γειτονιάς έχει προσφορά την Πέμπτη. Κάθε σουβλάκι κοστίζει 1 € και το κάθε αναψυκτικό 1 €. Ο Κώστας, ο Γιώργος και ο Βασίλης πηγαίνουν να φάνε.  
Ο Κώστας παίρνει μόνο σουβλάκια.  
Ο Γιώργος παίρνει σουβλάκια και ένα αναψυκτικό.  
Ο Βασίλης παίρνει σουβλάκια και δύο αναψυκτικά.
- α)** Βρείτε τη συνάρτηση που περιγράφει τα χρήματα που έδωσε ο Κώστας, ο Γιώργος και ο Βασίλης στο σουβλατζίδικο.  
**β)** Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων.
- 1.65.** Ένας ποδηλάτης ξεκινάει για να διανύσει την απόσταση Σέρρες-Θεσσαλονίκη. Η απόστασή του από την Θεσσαλονίκη  $t$  ώρες μετά την εκκίνηση, δίνεται από τη συνάρτηση  $S = 85 - 17t$ .
- α)** Να υπολογίσετε την απόσταση Σέρρες-Θεσσαλονίκη.  
**β)** Να υπολογίσετε την απόσταση από τη Θεσσαλονίκη μετά από 1 ώρα και μετά από 3 ώρες.  
**γ)** Να υπολογίσετε σε πόσες ώρες θα φτάσει στη Θεσσαλονίκη.  
**δ)** Ποιες είναι οι τιμές που μπορεί να πάρει ο χρόνος ( $t$ );  
**ε)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.  
**στ)** Να εξετάσετε αν το σημείο  $(2, 50)$  ανήκει στη γραφική παράσταση.
- 1.66.** Μία δεξαμενή με νερό άρχισε να αδειάζει από μία βρύση που είναι στην βάση της. Ο όγκος του νερού μέσα στη δεξαμενή μετά από  $t$  ώρες είναι  $V = 20 - 0,4t$ .
- α)** Να βρείτε πόσος ήταν ο όγκος του νερού πριν το άνοιγμα της βρύσης,  
**β)** Να βρείτε σε πόσες ώρες θα αδειάσει η δεξαμενή.  
**γ)** Να κάνετε την γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης.

- 1.67.** Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία  $A(0, 5)$  και  $B(3, 2)$ . Να βρείτε:
- α)** την εξίσωση της ευθείας.  
**β)** τις συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$  που τέμνει η ευθεία τον άξονα  $x'$ .  
**γ)** τις αποστάσεις  $AB$  και  $AO$  όπου το σημείο  $O$  είναι η αρχή των αξόνων.  
**δ)** το εμβαδόν του τριγώνου  $AOB$ .



- 1.68.** Έστω ευθεία  $\epsilon$  που είναι παράλληλη της ευθείας  $\zeta: y = \frac{3}{2}x$  και διέρχεται από το σημείο  $B(4, 2)$ . Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\epsilon$ . (Παρατήρηση: δύο ευθείες που είναι παράλληλες θα έχουν την ίδια κλίση).
- 1.69.** Δίνεται η συνάρτηση  $y = ax + \beta$ . Γνωρίζουμε ότι η ευθεία που παριστάνει γραφικά αυτή η συνάρτηση τέμνει τον  $x'$  στο σημείο  $A(1, 0)$  και τον  $y'$  στο σημείο  $B(0, 1)$ .
- α)** Να βρείτε την απόσταση  $AB$ .  
**β)** Να υπολογίσετε τις τιμές των  $a, \beta$ .  
**γ)** Να σχεδιάσετε την ευθεία  $\epsilon_1: y = ax + \beta$ .  
**δ)** Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας αυτής με την ευθεία που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\epsilon_2: y = -2x - 2$ .  
**ε)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  όπου  $\Gamma$  το σημείο τομής της  $\epsilon_2$  με τον άξονα  $x'$ .

## Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ , Η υπερβολή

**1.70.** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις υπερβολές  $y = \frac{1}{x}$  και  $y = -\frac{1}{x}$ .

**1.71.** Εξετάστε στους παρακάτω πίνακες ποια δεδομένα αντιστοιχούν σε αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Σε αυτή την περίπτωση να βρείτε τη σχέση που τα συνδέει.

**α)**

x	2	5	8
y	50	20	9

**β)**

x	2	4	8
y	10	5	2,5

**1.72.** Στον παρακάτω πίνακα, τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα.

x	2	4		16	12
y	2	1	8		

**α)** Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

**β)** Να βρείτε τη σχέση που συνδέει το ποσό y με το x.

**γ)** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της σχέσης με την προϋπόθεση ότι τα x, y είναι πραγματικοί αριθμοί  $\neq 0$ .

**1.73.** Δίνεται η συνάρτηση  $y = \frac{7k-4}{x}$ . Να βρείτε το k αν η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο A(5, 2).

**1.74.** Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με εμβαδόν  $3 \text{ cm}^2$ .

**α)** Να εκφράσετε το μήκος  $y = AB$  ως συνάρτηση του μήκους  $x = AG$ .

**β)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

**1.75. α)** Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που διέρχεται από το σημείο M(-2, 1).

**β)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο M και την αρχή των αξόνων.

**γ)** Να βρείτε τα κοινά σημεία της υπερβολής και της ευθείας (ε).

**1.76.** Είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το βάθος της θάλασσας. Παρατηρήθηκε ότι σε βάθος 3 km αντιστοιχεί θερμοκρασία  $8^\circ$  Κελσίου.

**α)** Να βρείτε τη θερμοκρασία x που θα αντιστοιχεί σε βάθος y Km.

**β)** Σε πόσα km βάθος η θερμοκρασία είναι  $2^\circ$  Κελσίου;

**γ)** Πόση είναι η θερμοκρασία σε βάθος 6Km;

**δ)** Να κάνετε την γραφική παράσταση βάθους - θερμοκρασίας.

**1.77.** Σε μια κλήρωση ΛΟΤΤΟ μοιράστηκαν 1.500.000€ σε όσους πέτυχαν «εξάρι».

**α)** Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης που δίνει το ποσό y που κερδίζει κάθε τυχερός με «εξάρι», σε σχέση με το πλήθος x των τυχερών.

**β)** Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη συνάρτηση για να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x		3	15
y	1.500.000		

- 1.78.** Ένα έργο συμφωνήθηκε να τελειώσει σε 25 ημέρες. Το μισό έργο έγινε από 4 εργάτες σε 15 ημέρες. Πόσοι εργάτες πρέπει να χρησιμοποιηθούν, για να τελειώσει το υπόλοιπο έργο μέσα στην προθεσμία των 25 ημερών;
- 1.79.** Ένα τρίγωνο έχει εμβαδό  $3 \text{ cm}^2$ .
- α)** Να εκφράσετε το ύψος  $υ$  του τριγώνου ως συνάρτηση της βάσης του  $β$ .
  - β)** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που βρήκατε.