Περιοδική έκδοση για τα Μαθηματικά Γυμνασίου
https://mathsgymnasio.wordpress.com/

Τεύχος 4

Περιεχόμενα

Δουκάκης Σπυρίδων & Σαράφης Ιωάννης
Αθήνα, Φεβρουάριος 2015
Έκδοση 1.0

ISSN: 2241-9381

Πρόλογος

Στο τέταρτο τεύχος της περιοδικής έκδοσης για τα Μαθηματικά Γυμνασίου περιλαμβάνεται διδακτικό υλικό για το κεφάλαιο «Συμμετρία» και το κεφάλαιο «Τρίγωνα-Παραλληλόγραμμα-Τραπέζια» , το οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί τόσο στο πλαίσιο της σχολικής τάξης, όσο και στο σπίτι από τον ίδιο τον μαθητή και την μαθήτρια.

Το υλικό περιλαμβάνει φύλλα εργασίας τα οποία είναι δομημένα σε μορφή δίστηλου. Τα φύλλα εργασίας περιλαμβάνουν στην αριστερή στήλη και μέσα σε κατάλληλα πλαίσια θεωρία, χρήσιμες πληροφορίες, ιστορικά σημειώματα κ.α., τα οποία χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένα εικονίδια[1] για να μπορεί ο μαθητής και η μαθήτρια να διακρίνει το στόχο τους. Στο κύριο μέρος του φύλλου εργασίας ο μαθητής καλείται να εργαστεί ατομικά ή συνεργατικά για να οικοδομήσει τις γνώσεις τους, μέσα σε ένα πλαίσιο σκαλωσιάς μάθησης, βάσει του ισχύοντος προγράμματος σπουδών, των οδηγιών διδασκαλίας, του υλικού του σχολικού βιβλίου και του υλικού του βιβλίου εκπαιδευτικού. Το υλικό συνοδεύεται από επιλεγμένα μικροπειράματα[2] που προέρχονται από το ψηφιακό σχολείο, από άλλες πηγές ή έχουν αναπτυχθεί από τους συγγραφείς. Κάθε κεφάλαιο ολοκληρώνεται με ασκήσεις, που καλείται να λύσει ο μαθητής. Οι ασκήσεις έχουν αναπτυχθεί με γνώμονα τις ανάγκες της σχολικής τάξης και την εμβάθυνση των μαθητών στις μαθηματικές έννοιες.

Τα φύλλα εργασίας και οι ασκήσεις αποτελούν μία οργανωμένη συγκέντρωση των υπαρχουσών πηγών υλικού και στοχεύουν στην υποστήριξη της μάθησης των μαθητών και στην ενίσχυση της μαθηματικής εκπαίδευσης, μέσα από ένα πλούσιο σε πηγές πλαίσιο. Για το λόγο αυτό το υλικό προσφέρεται με άδεια creative commons, ώστε να είναι διαθέσιμο και «ανοικτό» σε όλη την εκπαιδευτική μαθηματική κοινότητα.

Το υλικό έχει δουλευτεί στις τάξεις, έχει αξιοποιηθεί από δεκάδες μαθητές και μαθήτριες και από αρκετούς εκπαιδευτικούς. Ευχαριστούμε για τη βοήθεια όλους τους συναδέλφους που μας στήριξαν σε αυτή την προσπάθεια και κυρίως τους συναδέλφους μαθηματικούς του PIERCE-Αμερικανικό Κολλέγιο Ελλάδος και της Ελληνογαλλικής Σχολής Καλαμαρί.

Το Τεύχος 4 περιέχει υλικό για τα ακόλουθα:

- **Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄, Γεωμετρία, Κεφάλαιο 2, Συμμετρία**
- **Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄, Γεωμετρία, Κεφάλαιο 3, Τρίγωνα - Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια**

Καλή μελέτη!

Σπυρίδων Δουκάκης & Ιωάννης Σαράφης
mathsgymnasio@gmail.com

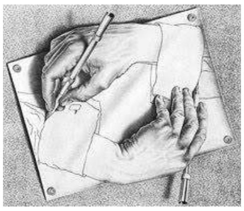
Ευχαριστίες στους/στις εκπαιδευτικούς: Βροντάκη Εμμανουήλ, Διαμάντη Χρήστο, Κάντα Σπυριδούλα, Μιχαλοπούλου Γεωργία και Πέρδο Αθανάσιο.

[1] Τα εικονίδια προέρχονται από το βιβλίο: Βακάλη Α., Γιαννόπουλος Η., Ιωαννίδης Ν., Κοίλιας Χ., Μάλαμας Κ., Μανωλόπουλος Ι., Πολίτης Π. (1999), *Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον*, ΙΤΥΕ, Διόφαντος.
[2] Τα μικροπειράματα προέρχονται από το Ψηφιακό σχολείο (dschool.edu.gr) και έχουν αναπτυχθεί από την ομάδα του Εργαστήριου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας με συντονιστή τον Καθ. Κυνηγό Χρόνη.

Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄, Γεωμετρία, Κεφάλαιο 2, Συμμετρία

Κεφάλαιο 2
Β.2.2. Άξονας συμμετρίας

∼



Άξονας συμμετρίας σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, τα οποία συμπίπτουν όταν διπλωθεί το σχήμα κατά μήκος της ευθείας. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σχήμα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία αυτή.

Όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς τον άξονα αυτόν είναι το ίδιο το σχήμα.

1. Μελετήστε το μικροπείραμα mpb2_1.ggb.

(α) Τι παρατηρείτε σ' αυτό το σχήμα;

....

....

....

(β) Με την ενεργοποίηση του κουμπιού «Πάνω σχήμα» και στη συνέχεια την ενεργοποίηση του κουμπιού «Κάτω σχήμα», τι παρατηρείτε;

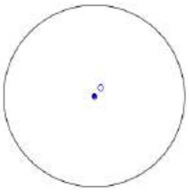
....

....

(γ) Ενεργοποιείστε το κουμπί «Άξονας». Μπορείτε να φανταστείτε ποιος είναι ο ρόλος της ευθείας που εμφανίστηκε;

....

2. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου (Ο, ρ). Μελετήστε το μικροπείραμα mpb2_2.ggb.



....

....

....

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(1) Κάθε κύκλος και ο αντίστοιχος κυκλικός δίσκος έχουν:

(α) έναν άξονα συμμετρίας

(β) άπειρους άξονες συμμετρίας

(γ) κανένα άξονα συμμετρίας.

(2) Εξετάσετε για καθένα από τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου Α, Ι, Γ και Θ αν έχουν:

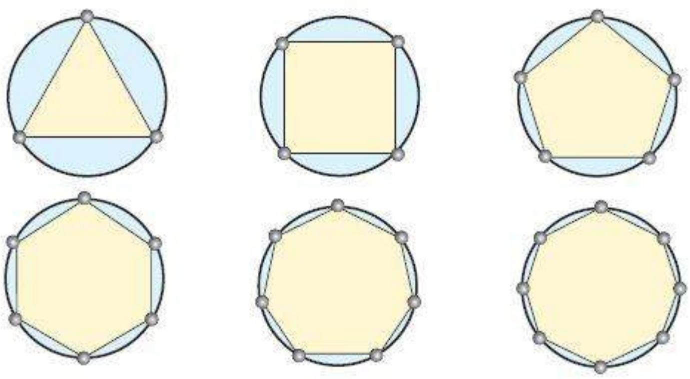
(α) κανένα

(β) ένα

(γ) περισσότερους από ένα άξονες συμμετρίας

Α	**Ι**	**Γ**	**Θ**

4. Να σχεδιάστε τους άξονες συμμετρίας των παρακάτω γεωμετρικών σχημάτων.



Β.2.1. Συμμετρία ως προς άξονα

∼

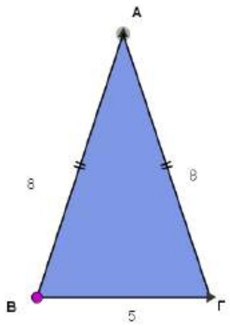
Συμμετρικό σημείου **Β** ως προς ευθεία **ε**, είναι το σημείο Γ με το οποίο συμπίπτει το **Β**, αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας ε.

Κάθε σημείο μιας ευθείας ε είναι συμμετρικό του εαυτού του ως προς την ε.

Δύο σχήματα **(Σ1)** και **(Σ2)** λέγονται **συμμετρικά** ως προς μία ευθεία **ε**, όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την **ε**.

Επειδή με δίπλωση κατά μήκος της **ε** συμπίπτει το **(Σ1)** με το **(Σ2)**, γνωρίζουμε ότι αυτά θα είναι ίσα. Επομένως: **Τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα.**

5. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb2_3.ggb. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ.



(α) Τι παρατηρείτε όταν το τρίγωνο είναι διπλωμένο;

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

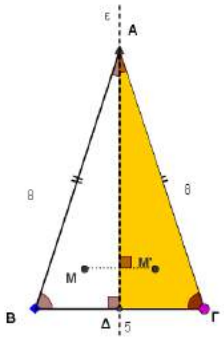
(β) Τι παρατηρείτε για το σημείο Μ;

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………



(γ) Τι παρατηρείτε για την ευθεία ε σε σχέση με την ΒΓ;

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

(δ) Τι είναι η ΑΔ για την γωνία Α;

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

(ε) Ποιες είναι οι ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου;

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

6. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb2_4.ggb. Τι παρατηρείτε;

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

7. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb2_5.ggb. Τι παρατηρείτε;

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Β.2.3. Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

∼

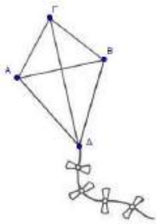
Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του.

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει **ίσες αποστάσεις (ισαπέχει)** από τα άκρα του.

Κάθε σημείο που **ισαπέχει** από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη **μεσοκάθετό** του.

Η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι **άξονας συμμετρίας** του.

8. Οι χαρταετοί κατασκευάζονται σε διάφορα σχήματα. Ένα από αυτά είναι το ακόλουθο.



(α) Αν ο καιρός είναι κατάλληλος, ο χαρταετός με την συγκεκριμένη κατασκευή θα πετάξει;

(β) Ποιες, προϋποθέσεις απαιτούνται γι' αυτό;

....

....

....

....

9. Να σχεδιάσετε την μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, χωρίς τη βοήθεια του υποδεκάμετρου και του γνώμονα, αλλά μόνο με τη χρήση «κανόνα και διαβήτη» (mpb2_6.ggb).

10. Να κατασκευάσετε ευθεία δ κάθετη σε ευθεία ε στο σημείο της Α.
Να κατασκευάσετε την κάθετη δ μιας ευθείας ε από σημείο Α εκτός αυτής. (mpb2_7.ggb).

11. Να κατασκευάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α.

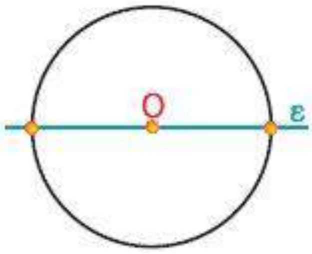
Β.2.5. Κέντρο συμμετρίας

~

Κέντρο συμμετρίας σχήματος ονομάζεται ένα σημείο του Ο, γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά 180°, συμπίπτει με το αρχικό. Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο σημείο, λέμε ότι το σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο Ο.

12. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb2_8.ggb. Ελέγξτε αν τα σχήματα έχουν κέντρο συμμετρίας.

13. Ποιο είναι το κέντρο συμμετρίας ενός κύκλου;



....

....

....

....

....

Όταν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο το σχήμα.

14. Τοποθετήστε ένα "Χ" στις κατάλληλες θέσεις, για τη θετική σας απάντηση.

	Άξονες συμμετρίας						*Έχει Κέντρο Συμμετρίας*
	Κανένα	*Ένα*	*Δύο*	*Τρεις*	*Τέσσερις*	*Περισσότερους*	
Ευθύγραμμο τμήμα							
Ισοσκελές τρίγωνο							
Ισόπλευρο τρίγωνο							
Παραλληλόγραμμο							
Ορθογώνιο							
Ρόμβος							
Τετράγωνο							
Κύκλος							

15. Να βρείτε στα παρακάτω σχήματα το κέντρο συμμετρίας, αν υπάρχει.

Β.2.4. Συμμετρία ως προς σημείο

~

Συμμετρικό σημείου Α ως προς κέντρο Ο, είναι το σημείο Α', με το οποίο συμπίπτει το Α, αν περιστραφεί περί το Ο κατά 180°.

Δύο σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς σημείο Ο, όταν το Ο είναι μέσο του τμήματος ΜΜ'.

Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς σημείο Ο, όταν κάθε σημείο του ενός είναι συμμετρικό ενός σημείου του άλλου ως προς το Ο.

Τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα.

16. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb2_9.ggb. Τι παρατηρείτε;

17. Να βρείτε το συμμετρικό Α' του σημείου Α, ως προς σημείο Ο.

18. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό Α'Β' ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ ως προς σημείο Ο.

19. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ως προς σημείο Ο: (α) μιας ευθείας ε και (β) μιας ημιευθείας Αx.

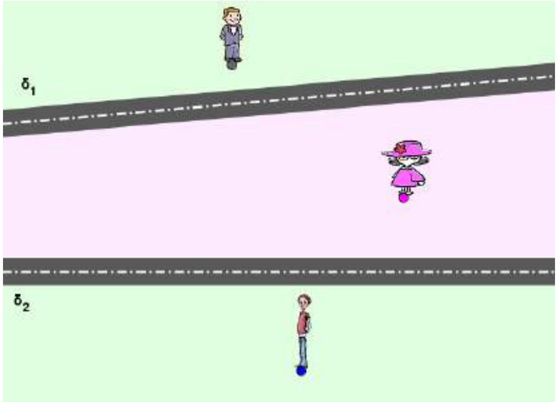
20. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα μιας γωνίας $x\hat{A}y$ ως προς σημείο Ο.

21. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα ενός κύκλου (Κ, ρ) ως προς σημείο Ο.

Β.2.6. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία

~

22. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb2_10.ggb.



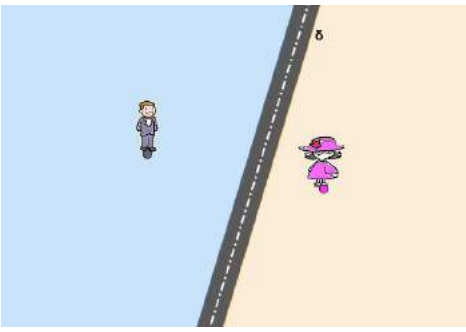
Σχήμα 1

(α) Αν σας ρωτούσαν σε ποια ζώνη βρίσκεται το κορίτσι στο Σχήμα 1 τι θα απαντούσατε;

....

(β) Αν σας ρωτούσαν σε ποια ζώνη βρίσκονται τα αγόρια στο Σχήμα 1 τι θα απαντούσατε;

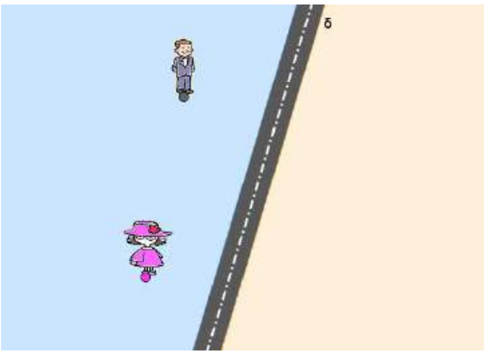
....



Σχήμα 2

(γ) Αν σας ρωτούσαν ποια είναι η θέση των δυο παιδιών ως προς τον δρόμο στο Σχήμα 2 τι θα απαντούσατε;

....



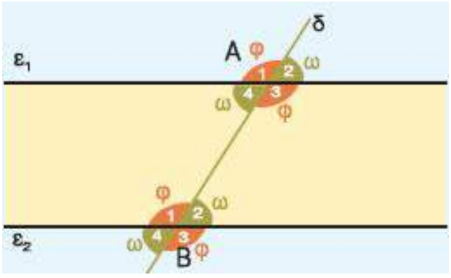
Σχήμα 3

(δ) Αν σας ρωτούσαν ποια είναι η θέση των δυο παιδιών ως προς τον δρόμο στο Σχήμα 3 τι θα απαντούσατε;

....

23. Μελετήστε τις δραστηριότητες του μικροπειράματος mpb2_11.ggb.

24. Παρατηρήστε το σχήμα και στη συνέχεια καταγράψετε τις γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ευθείες ε1 και ε2.



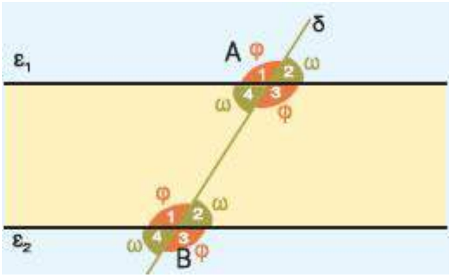
....

....

....

....

25. Παρατηρήστε το σχήμα και στη συνέχεια καταγράψετε τις γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας δ.



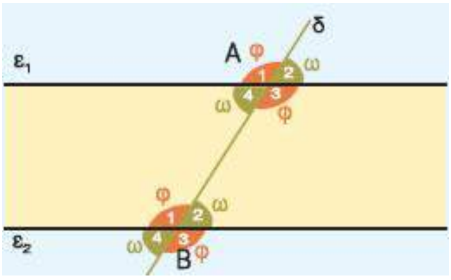
....

....

....

....

26. Παρατηρήστε το σχήμα και στη συνέχεια καταγράψετε τις γωνίες που βρίσκονται η μία στο ένα κι η άλλη στο άλλο ημιεπίπεδο της ευθείας δ.



....

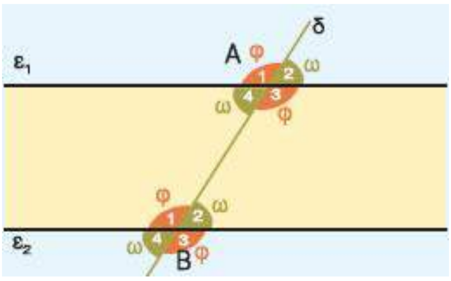
....

....

....

27. Παρατηρήστε το σχήμα και στη συνέχεια καταγράψετε

(α) τις εντός εναλλάξ γωνίες,
(β) τις εκτός εναλλάξ γωνίες,
(γ) εντός και επί τα αυτά γωνίες,
(δ) τις εκτός και επί τα αυτά γωνίες,
(ε) τις εντός - εκτός εναλλάξ γωνίες,
(στ) τις εντός - εκτός επί τα αυτά γωνίες,



....

....

....

....

....

Οι γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ευθείες ε1 και ε2 ονομάζονται «**εντός**» (των ευθειών) και όλες οι άλλες «**εκτός**».

Οι γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας **δ** ονομάζονται **«επί τα αυτά»** (μέρη της ευθείας).

Δύο γωνίες που βρίσκονται η μία στο ένα κι η άλλη στο άλλο ημιεπίπεδο της ευθείας δ, λέγονται μεταξύ τους «**εναλλάξ**».

Άρα έχουμε έξι ονομασίες για τα διαφορετικά ζευγάρια των γωνιών.

(α) **εντός εναλλάξ** και
(β) **εκτός εναλλάξ**
(γ) **εντός και επί τα αυτά** και
(δ) **εκτός και επί τα αυτά**
(ε) **εντός - εκτός εναλλάξ** και
(στ) **εντός - εκτός επί τα αυτά**.

Ο χαρακτηρισμός των γωνιών γίνεται: (α) από τη θέση τους ως προς την ενδιάμεση περιοχή που ορίζουν οι ε1 και ε2 (εντός, εκτός, εντός-εκτός) και (β) από τη θέση τους ως προς τα ημιεπίπεδα που ορίζει η δ (επί τα αυτά, εναλλάξ).

Οι χαρακτηρισμοί που δίνονται στα ζεύγη γωνιών είναι ανεξάρτητοι του αν οι ευθείες ε1 και ε2 είναι παράλληλες.

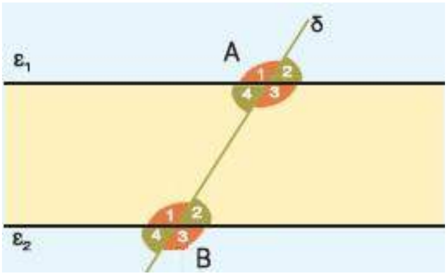
Στην περίπτωση κατά την οποία οι ευθείες που τέμνονται από άλλη είναι παράλληλες τότε ισχύουν ορισμένες σημαντικές σχέσεις μεταξύ των γωνιών.

1. Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
2. Οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.
3. Οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Αν μια από τις παραπάνω προτάσεις ισχύει, τότε οι ευθείες ε1 και ε2 είναι παράλληλες.

Συνεπώς, κάθε μια από τις παραπάνω τρεις προτάσεις αποτελεί συνθήκη παραλληλίας.

28. Να συγκρίνετε μεταξύ τους τις γωνίες, που σχηματίζονται στα σημεία Α και Β, στα οποία τέμνει μια ευθεία δ δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.



....

....

....

....

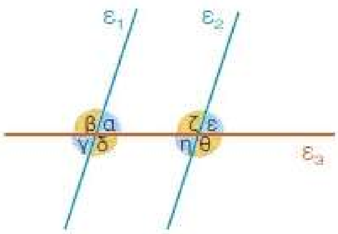
....

....

....

....

29. Στο παρακάτω σχήμα είναι ε1//ε2. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες, που είναι σημειωμένες, αν είναι α = 40°.



....

....

....

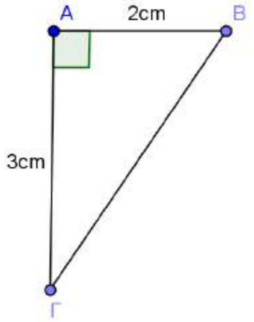
....

....

....

Ασκήσεις προς λύση

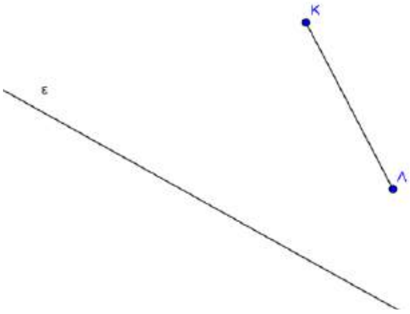
2.1. Στο παρακάτω σχήμα σχεδιάστε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς την πλευρά ΒΓ.



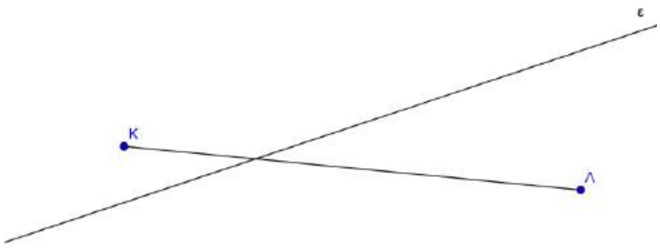
Τι σχήμα σχηματίζεται και γιατί;

2.2. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ ως προς την ευθεία ε σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα:

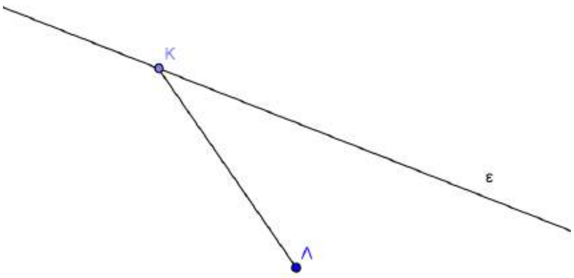
α)



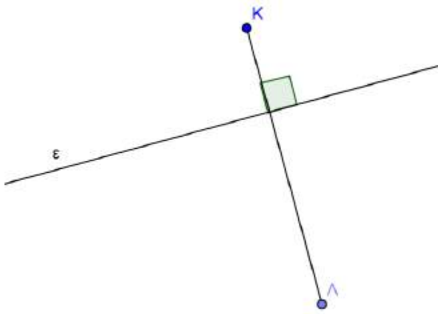
β)



γ)



δ)



2.3. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ενός τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ ως προς:

α) ευθεία ε η οποία διέρχεται από τα σημεία Β και Γ.

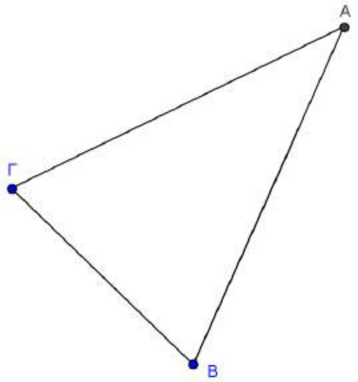
β) τυχαία ευθεία που διέρχεται από το σημείο Γ.

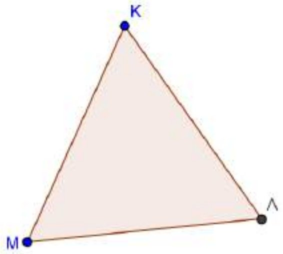
γ) ευθεία δ που είναι παράλληλη στην ΑΓ και διέρχεται από το σημείο Β.

2.4. Δίνεται μια γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της Οδ. Να βρείτε το συμμετρικό της γωνίας ως προς τη διχοτόμο Οδ.

2.5. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τριγώνου ως προς τη διάμεσο ΑΜ.

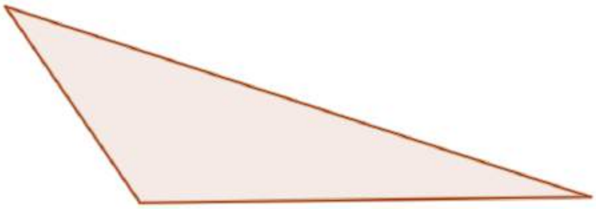
2.6. Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΚΛΜ.

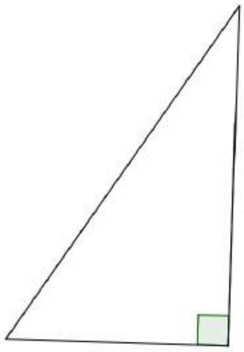




Να χαράξετε τους άξονες συμμετρίας σε καθένα από τα σχήματα.

2.7. Χαράξτε τον ή τους άξονες συμμετρίας σε όσα από τα παρακάτω σχήματα έχουν άξονα συμμετρίας.

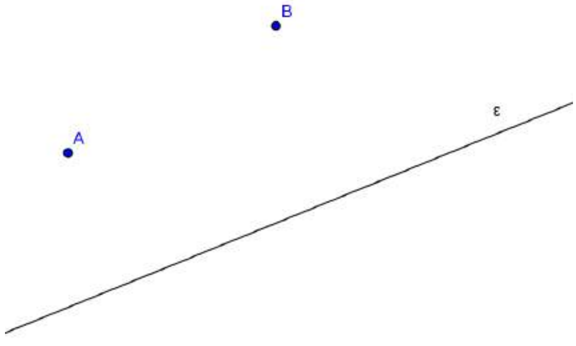




2.8. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας του σχήματος που αποτελείται από δύο ίσους κύκλους αν αυτοί:
α) εφάπτονται εξωτερικά,
β) τέμνονται,
γ) βρίσκονται ο ένας μέσα στον άλλο.

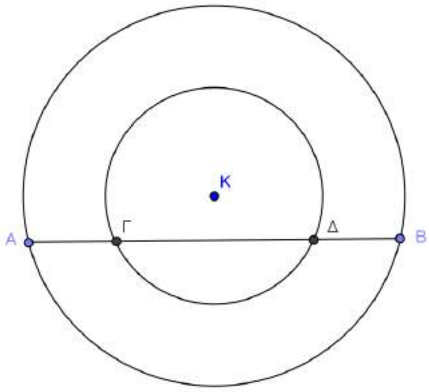
2.9. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάστε τις μεσοκαθέτους του. Τι παρατηρείτε;

2.10. Δίνεται ευθεία ε και δύο σημεία Α και Β εκτός της ευθείας.



Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την ίδια απόσταση από τα σημεία Α και Β.

2.11. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Κ. Αποδείξτε ότι η κάθετη στις ΑΒ και ΓΔ από το Κ είναι μεσοκάθετός τους.

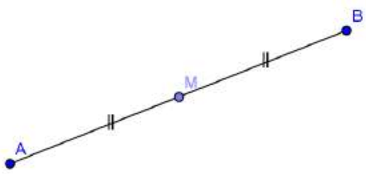


2.12. Να βρείτε το κέντρο ενός κύκλου, χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη.

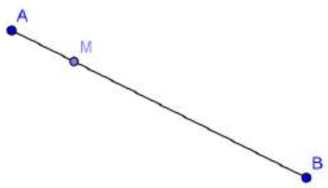
2.13. Κατασκευάστε το συμμετρικό του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως προς το σημείο Μ στα παρακάτω σχήματα:

α)

β)



γ)



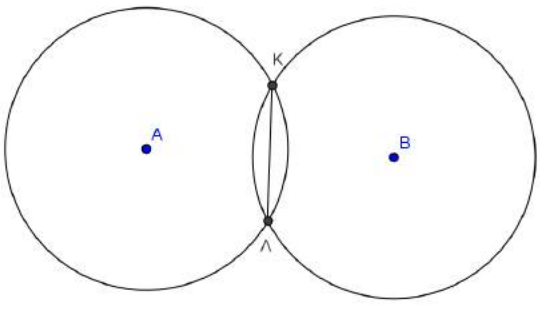
δ)

2.14. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς:
- α) το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ.
- β) το σημείο Β.

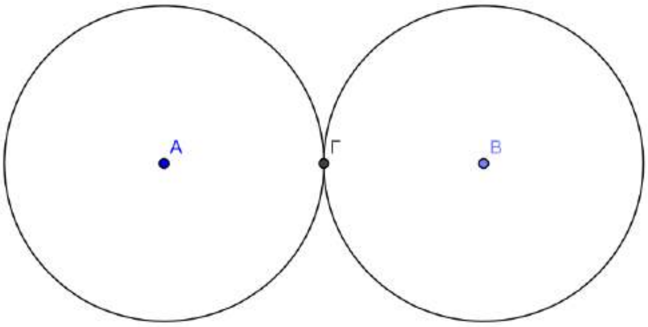
2.15. Να βρείτε το συμμετρικό μιας ημιευθείας ως προς την αρχή της.

2.16. Να βρείτε το συμμετρικό ενός ορθογωνίου τριγώνου ως προς την κορυφή της ορθής γωνίας του.

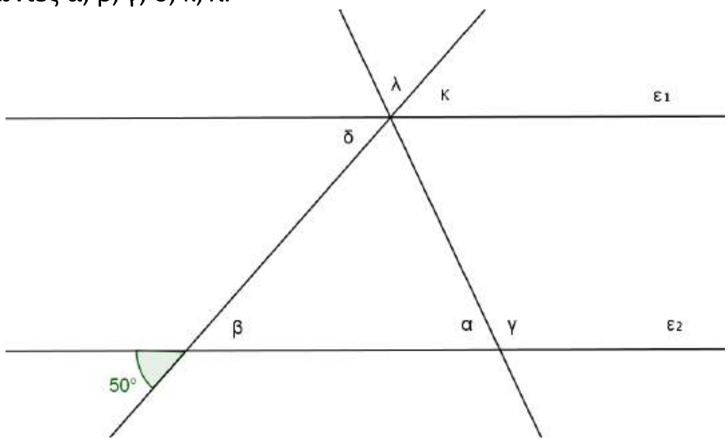
2.17. Να βρείτε το κέντρο συμμετρίας του παρακάτω σχήματος.



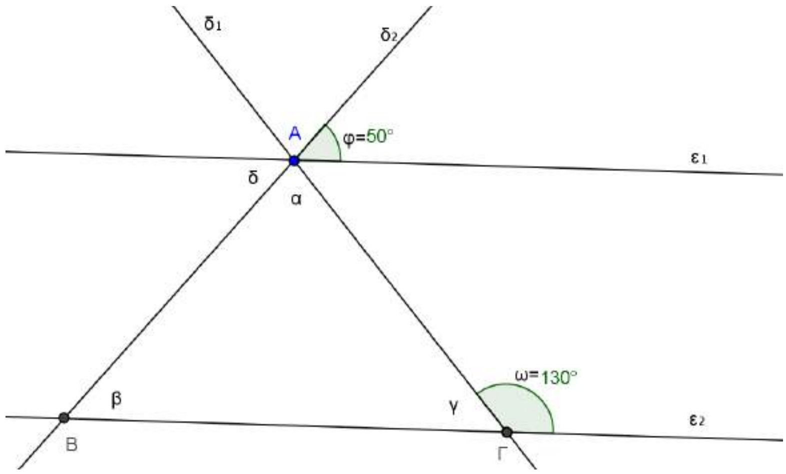
2.18. Να βρείτε το κέντρο συμμετρίας του παρακάτω σχήματος.



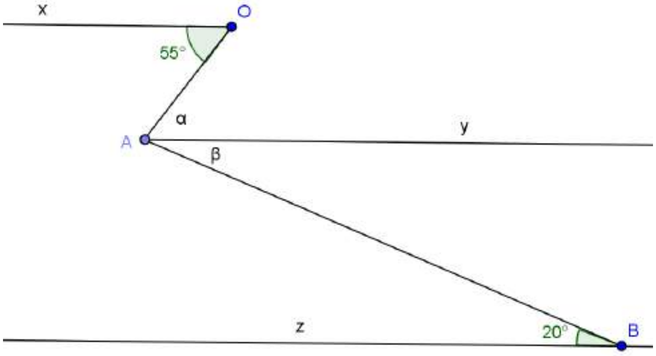
2.19. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και η γωνία γ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία α κατά 53°. Να υπολογίσετε τις γωνίες α, β, γ, δ, κ, λ.



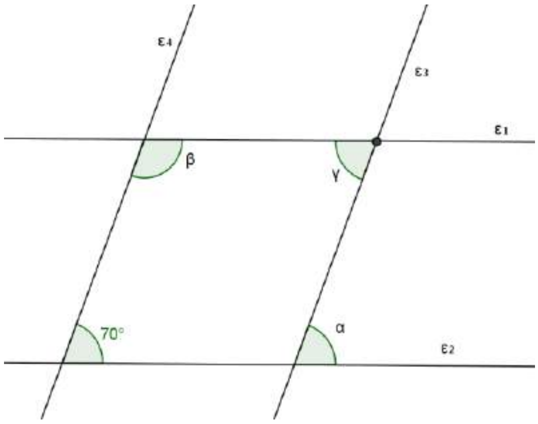
2.20. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες με τέμνουσες τις δ_1 και δ_2, που τέμνονται στο σημείο Α της ευθείας ε_1. Δίνονται οι γωνίες $\hat{\varphi} = 50^\circ$ και $\hat{\omega} = 130^\circ$. Να υπολογίσετε σε μοίρες, τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



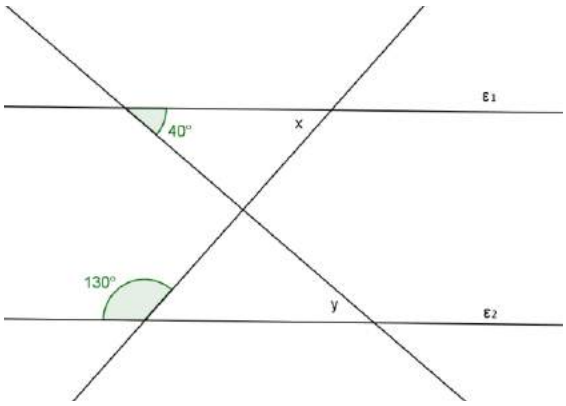
2.21. Οι ημιευθείες Οx, Αy και Βz είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, O\hat{A}B$.



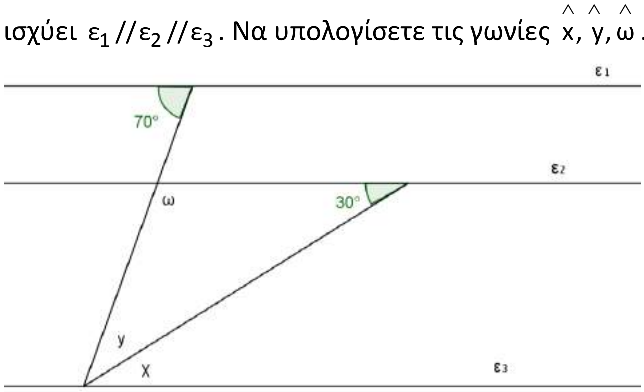
2.22. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Οι ε_1 και ε_2 τέμνονται από τις $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$.



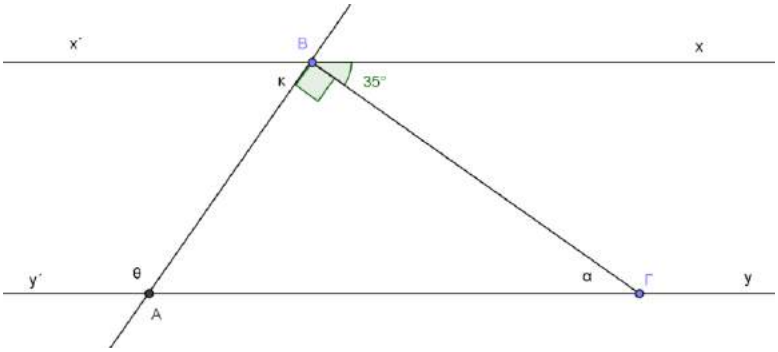
2.23. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}, \hat{y}$.



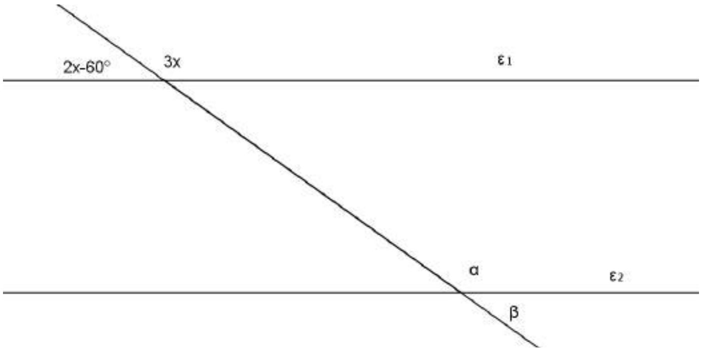
2.24. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}, \hat{y}, \hat{\omega}$.



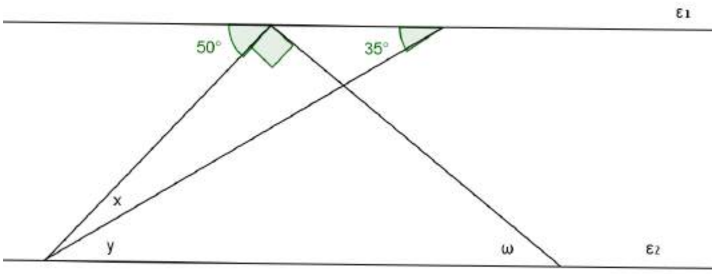
2.25. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $x'x // y'y$, $\widehat{xBy} = 35^\circ$ και $AB \perp B\Gamma$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\theta}, \hat{\kappa}, \hat{\alpha}$.



2.26. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, να υπολογίσετε τις γωνίες που σημειώνονται στο παρακάτω σχήμα.



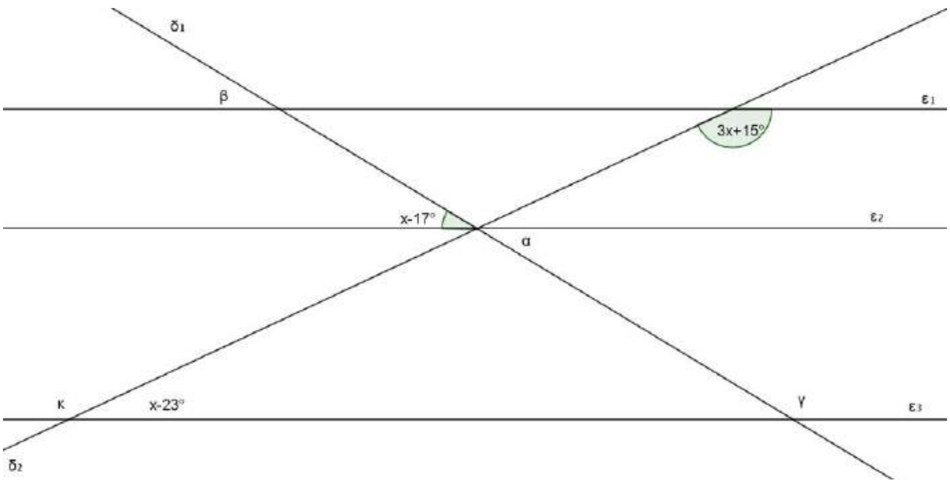
2.27. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}, \hat{y}, \hat{\omega}$.



2.28. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ και τέμνονται από τις δ_1 και δ_2. Να υπολογίσετε:

α) το x.

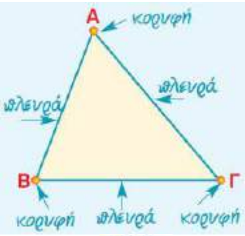
β) τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\kappa}$.



Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄, Γεωμετρία, Κεφάλαιο 3, Τρίγωνα - Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

Κεφάλαιο 3ο: Τρίγωνα - Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια
Β.3.1 Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

∼



Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις κορυφές Α, Β, Γ, τρεις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και τρεις γωνίες.

Τα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, εκτός από τις πλευρές, συμβολίζουν και τα μήκη των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων.

Μία γωνία ορθή: **Ορθογώνιο**

Μία γωνία μεγαλύτερη της ορθής: **Αμβλυγώνιο**

Όλες οι γωνίες μι-κρότερες της ορθής: **Οξυγώνιο**

Τρεις πλευρές ίσες: **Ισόπλευρο**

Δύο πλευρές ίσες: **Ισοσκελές**

Όλες οι πλευρές άνισες **Σκαληνό**

30. Μελετήστε το μικροπείραμα mpb3_1.ggb.

(α) Να καταγράψετε τα κριτήρια με τα οποία διακρίνουμε τα τρίγωνα.

....

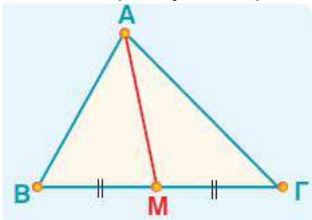
....

....

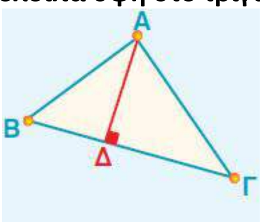
(β) Να σχεδιάσετε από ένα αντίστοιχο τρίγωνο.

31. Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

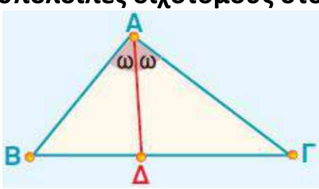
(α) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς, λέγεται διάμεσος.
Να σχεδιάσετε και τις υπόλοιπες διαμέσους στο τρίγωνο ΑΒΓ.



(β) Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή ενός τριγώνου κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς, λέγεται ύψος του τριγώνου.
Να σχεδιάσετε και τα υπόλοιπα ύψη στο τρίγωνο ΑΒΓ.



(γ) Το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας ενός τριγώνου που φέρνουμε από μια κορυφή και καταλήγει στην απέναντι πλευρά, λέγεται διχοτόμος του τριγώνου.
Να σχεδιάσετε και τις υπόλοιπες διχοτόμους στο τρίγωνο ΑΒΓ.



Β.3.2. Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

~

32. Μελετήστε το μικροπείραμα mpb3_2.ggb.

(α) Να εξετάσετε σε κάθε περίπτωση πόσο είναι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου. Να διατυπώσετε έναν κανόνα.

....

....

....

(β) Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν όλες οι γωνίες ενός τριγώνου να είναι ίσες. Εξηγήστε.

....

....

....

....

(γ) Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν δύο γωνίες του (π.χ οι Β και Γ) να είναι ορθές. Εξηγήστε.

....

....

....

....

Σε κάθε τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ ισχύει: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$

(δ) Να εξετάσετε το άθροισμα των γωνιών Β και Γ όταν η γωνία Α γίνει ορθή. Εξηγήστε.

....

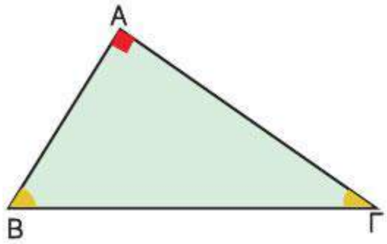
....

....

....

33. Να επιχειρηματολογήσετε για το άθροισμα των τριών γωνιών κάθε τριγώνου.

34. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.



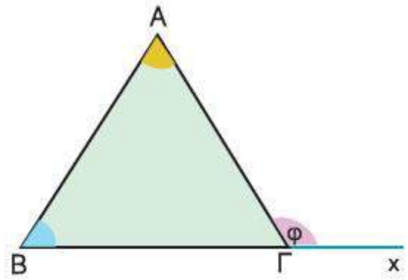
....

....

....

....

35. Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου ισούται με την εξωτερική της τρίτης γωνίας. (Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $A\hat{\Gamma}x$, που σχηματίζεται από την ΑΓ και την προέκταση της ΒΓ προς το μέρος του Γ, ονομάζεται εξωτερική γωνία της $\hat{\Gamma}$).



....

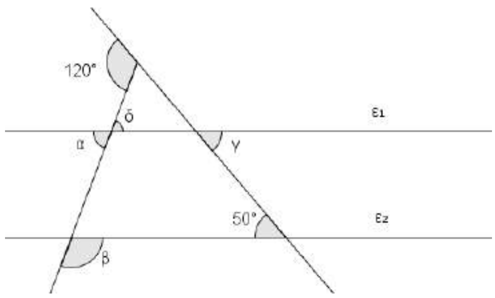
....

....

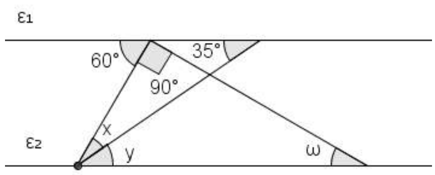
....

....

36. Στο παρακάτω σχήμα η ε_1 είναι παράλληλη στην ε_2. Να υπολογίσετε τις γωνίες α, β, γ και δ.



37. Στο παρακάτω σχήμα, αν ε_1 // ε_2, να υπολογίσετε τις γωνίες x, y και ω:



Ασκήσεις προς λύση

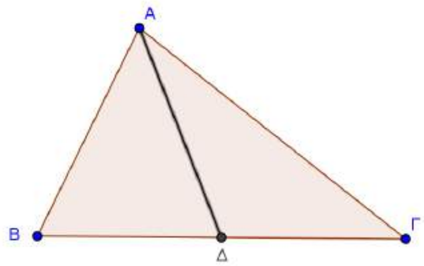
Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

3.1. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσο του ΓΔ. Να φέρετε τις διαμέσους ΑΜ και ΒΖ αντίστοιχα στα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΓΔ.

3.2. Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ να χαράξετε τις τρείς διαμέσους. Τι παρατηρείτε;

3.3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$),να φέρετε τη διάμεσο Μ και να συγκρίνετε το μήκος της με τα τμήματα ΒΜ και ΜΓ.

3.4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΔ.

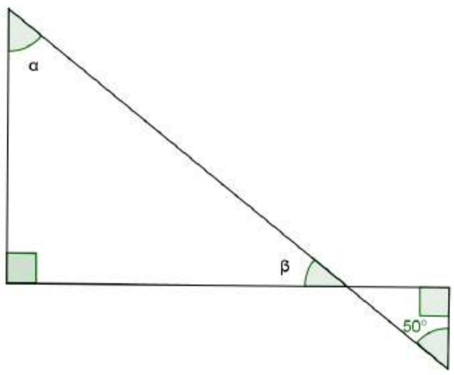


Από την κρυφή Α να φέρετε τα ύψη των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ. Τι παρατηρείτε;

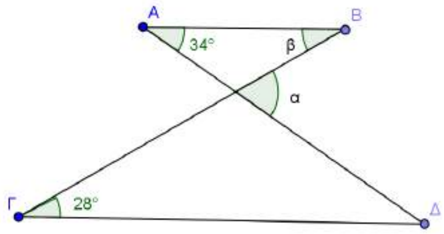
Άθροισμα γωνιών τριγώνου-Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

3.5. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ στα παρακάτω σχήματα.

α)

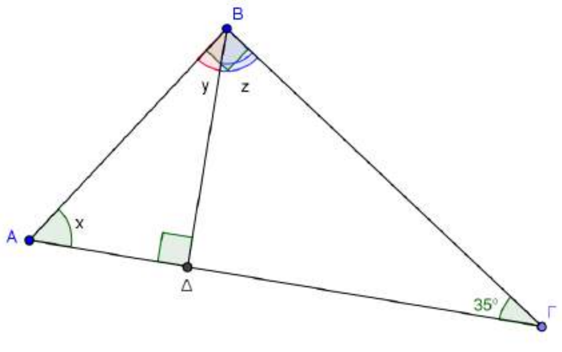


β) αν ΑΒ // ΓΔ

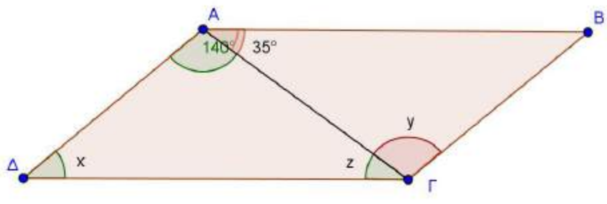


3.6. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ στα παρακάτω σχήματα.

α)



β) ΑΒ // ΓΔ και ΑΔ // ΒΓ

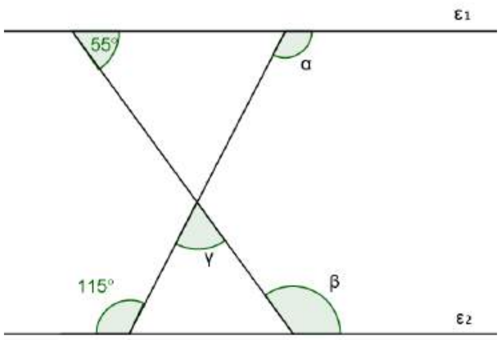


3.7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=44^\circ$, $\hat{\Gamma}=39^\circ$. Μια ευθεία ε//ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

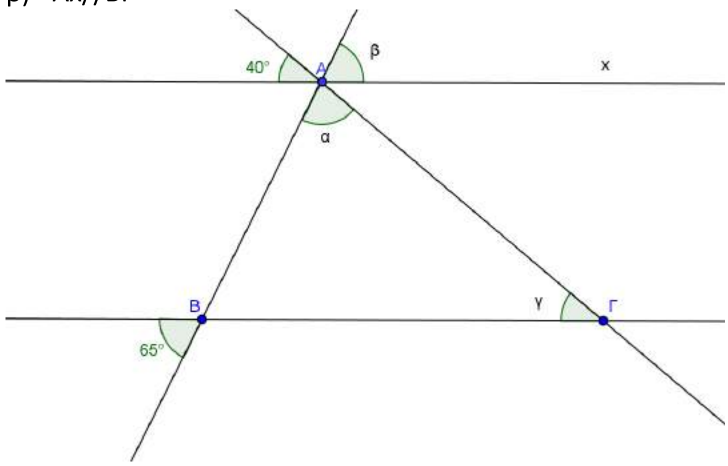
3.8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με $\hat{B}=70^\circ$. Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ της γωνίας Β. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ, ΒΔΓ.

3.9. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ στα παρακάτω σχήματα.

α) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$



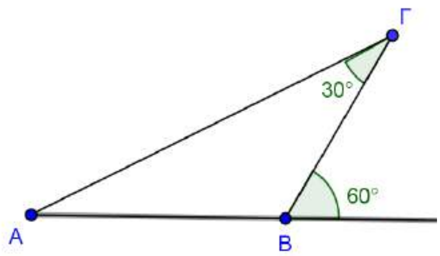
β) Αx//ΒΓ



3.10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=60^\circ$, $\hat{B}=75^\circ$ και ΑΒ < ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΓΔ = ΒΔ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

3.11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες $\hat{A}=30^\circ$, $\hat{B}=(x+30)^\circ$ και $\hat{\Gamma}=(2x)^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του και να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

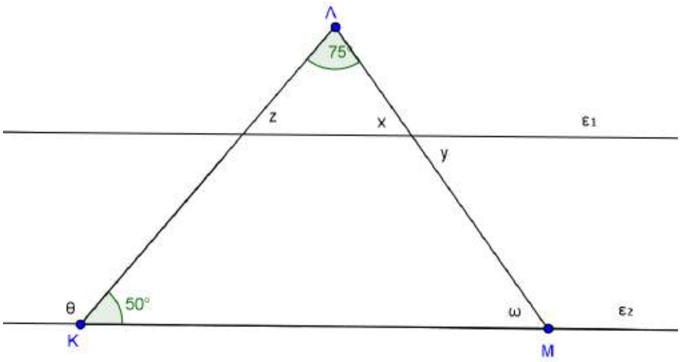
3.12. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω τριγώνου ΑΒΓ και να βρείτε το είδος του.



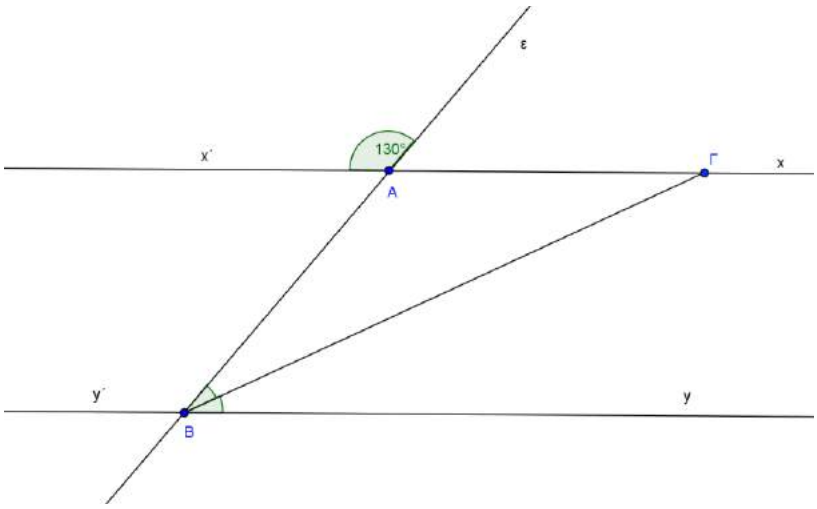
3.13. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y, z, ω και θ.

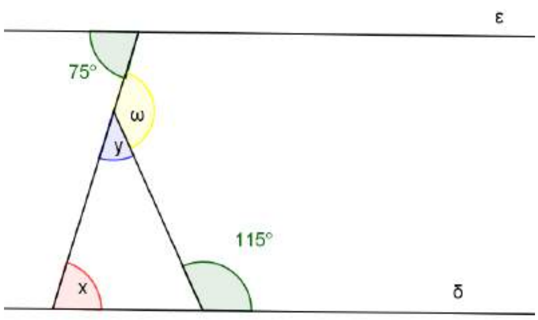
β) Να αναφέρετε το είδος του τριγώνου ΚΛΜ ως προς τις γωνίες του.



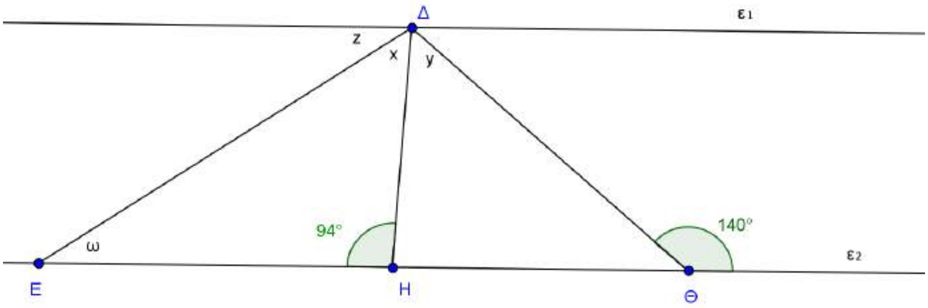
3.14. Δύο ευθείες x΄x και y΄y παράλληλες μεταξύ τους τέμνονται από τρίτη ευθεία ε στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και η γωνία x΄Αε είναι 130^o. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας ΑΒy που τέμνει την x΄x στο Γ. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



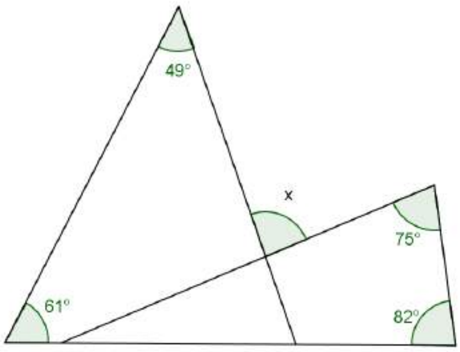
3.15. Να υπολογίσετε στο παρακάτω σχήμα τις γωνίες x, y, ω γνωρίζοντας ότι οι ευθείες (ε) και (δ) είναι παράλληλες.



3.16. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ε_1 // ε_2 και ΔΗ η διχοτόμος της γωνίας ΕΔΘ. Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y, ω, z και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



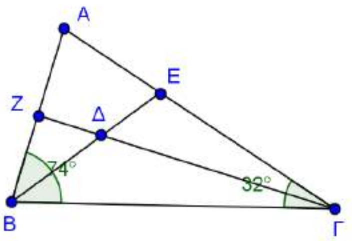
3.17. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{x}$.



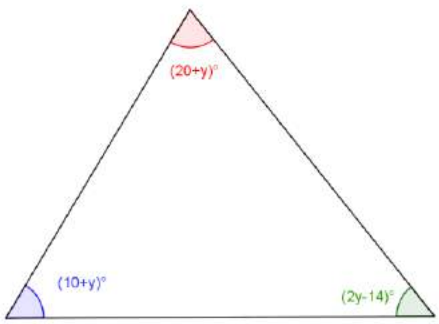
3.18. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 36^o$ και η γωνία $\hat{A}$ είναι διπλάσια από τη γωνία $\hat{\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{\Gamma}$.

3.19. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ = ΛΜ, η γωνία $\hat{\Lambda}$ είναι κατά 42^o μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{K}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΚΛΜ.

3.20. Στο παρακάτω σχήμα η γωνία $\hat{B}$ είναι 74^o και η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι32^o. Φέρνουμε τις διχοτόμους ΒΕ και ΓΖ οι οποίοι τέμνονται στο Δ. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\widehat{B\Delta\Gamma}$.



3.21. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{y}$ στο παρακάτω σχήμα.



3.22. Υπολογίστε τις γωνίες $\hat{x}, \hat{y}$ στο παρακάτω σχήμα. Ισχύει ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $\delta_1 \parallel \delta_2$.