

---

**Περιοδική έκδοση για τα  
Μαθηματικά Γυμνασίου**  
<https://mathsgymnasio.wordpress.com/>

---

**Τεύχος 3**

---

## **Περιεχόμενα**

- Σελίδα 5:** Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄, Αριθμητική - Άλγεβρα, Κεφάλαιο 4, Εξισώσεις και προβλήματα
- Σελίδα 11:** Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄, Αριθμητική - Άλγεβρα, Κεφάλαιο 5, Ποσοστά

**Δουκάκης Σπυρίδων & Σαράφης Ιωάννης**  
**Αθήνα, Νοέμβριος 2014**  
**Έκδοση 1.0**



# Πρόλογος

Με το τρίτο τεύχος της περιοδικής έκδοσης για τα Μαθηματικά Γυμνασίου συνεχίζεται η προσπάθεια δόμησης κατάλληλου διδακτικού υλικού, το οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί τόσο στο πλαίσιο της σχολικής τάξης, όσο και στο σπίτι από τον ίδιο τον μαθητή και την μαθήτριά.

Το υλικό περιλαμβάνει φύλλα εργασίας τα οποία είναι δομημένα σε μορφή δίστηλου. Τα φύλλα εργασίας περιλαμβάνουν στην αριστερή στήλη και μέσα σε κατάλληλα πλαίσια θεωρία, χρήσιμες πληροφορίες, ιστορικά σημειώματα κ.α., τα οποία χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένα εικονίδια<sup>1</sup> για να μπορεί ο μαθητής και η μαθήτριά να διακρίνει το στόχο τους. Στο κύριο μέρος του φύλλου εργασίας ο μαθητής καλείται να εργαστεί ατομικά ή συνεργατικά για να οικοδομήσει τις γνώσεις τους, μέσα σε ένα πλαίσιο σκαλωσιάς μάθησης, βάσει του ισχύοντος προγράμματος σπουδών, των οδηγιών διδασκαλίας, του υλικού του σχολικού βιβλίου και του υλικού του βιβλίου εκπαιδευτικού. Το υλικό συνοδεύεται από επιλεγμένα μικροπειράματα<sup>2</sup> που προέρχονται από το ψηφιακό σχολείο, από άλλες πηγές ή έχουν αναπτυχθεί από τους συγγραφείς. Κάθε κεφάλαιο ολοκληρώνεται με ασκήσεις, που καλείται να λύσει ο μαθητής. Οι ασκήσεις έχουν αναπτυχθεί με γνώμονα τις ανάγκες της σχολικής τάξης και την εμβάθυνση των μαθητών στις μαθηματικές έννοιες.

Τα φύλλα εργασίας και οι ασκήσεις αποτελούν μία οργανωμένη συγκέντρωση των υπαρχουσών πηγών υλικού και στοχεύουν στην υποστήριξη της μάθησης των μαθητών και στην ενίσχυση της μαθηματικής εκπαίδευσης, μέσα από ένα πλούσιο σε πηγές πλαίσιο. Για το λόγο αυτό το υλικό προσφέρεται με άδεια creative commons, ώστε να είναι διαθέσιμο και «ανοικτό» σε όλη την εκπαιδευτική μαθηματική κοινότητα.

Το υλικό έχει δουλευτεί στις τάξεις, έχει αξιοποιηθεί από δεκάδες μαθητές και μαθήτριες και από αρκετούς εκπαιδευτικούς. Ευχαριστούμε για τη βοήθεια όλους τους συναδέλφους που μας στήριξαν σε αυτή την προσπάθεια και κυρίως τους συναδέλφους μαθηματικούς του PIERCE-Αμερικανικό Κολλέγιο Ελλάδος και της Ελληνογαλλικής Σχολής Καλαμαρι.

**Το Τεύχος 3 περιέχει υλικό για τα ακόλουθα:**

- **Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄ Αριθμητική-Άλγεβρα, Κεφάλαιο 4, Εξισώσεις και προβλήματα**
- **Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄ Αριθμητική-Άλγεβρα, Κεφάλαιο 5, Ποσοστά**

Καλή μελέτη!

Σπυρίδων Δουκάκης & Ιωάννης Σαράφης  
[mathsgymnasio@gmail.com](mailto:mathsgymnasio@gmail.com)



Αυτό το υλικό διατίθεται με άδεια Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή 4.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>).

Η αναφορά σε αυτό θα πρέπει να γίνεται ως εξής:

Δουκάκης, Σ., & Σαράφης, Ι. (2014). *Περιοδική έκδοση για τα Μαθηματικά Γυμνασίου, Τεύχος 3*, (Έκδοση 1.0, σ. 20).

Ευχαριστίες στους/στις εκπαιδευτικούς:

Βροντάκη Εμμανουήλ, Διαμάντη Χρήστο, Κάντα Σπυριδούλα, Μιχαλοπούλου Γεωργία και Πέρδο Αθανάσιο.

<sup>1</sup> Τα εικονίδια προέρχονται από το βιβλίο: Βακάλη Α., Γιαννόπουλος Η., Ιωαννίδης Ν., Κοίλιας Χ., Μάλαμας Κ., Μανωλόπουλος Ι., Πολίτης Π. (1999), *Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον*, ΙΤΥΕ, Διόφαντος.

<sup>2</sup> Τα μικροπειράματα προέρχονται από το Ψηφιακό σχολείο ([dschool.edu.gr](http://dschool.edu.gr)) και έχουν αναπτυχθεί από την ομάδα του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας με συντονιστή τον Καθ. Κυνηγό Χρόνη.

**Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄: Αριθμητική – Άλγεβρα,  
Κεφάλαιο 4 - Εξισώσεις και προβλήματα**



# Κεφάλαιο 4: Εξισώσεις και προβλήματα

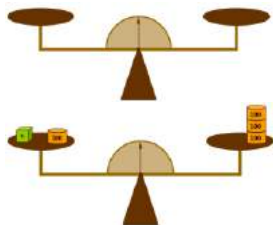
## Α.4.1. Η έννοια της εξίσωσης. Οι εξισώσεις: $\alpha + x = \beta$ , $x - \alpha = \beta$ , $\alpha - x = \beta$ , $\alpha x = \beta$ , $\alpha : x = \beta$ και $x : \alpha = \beta$



Εικόνα από αγγείο του 6ου αιώνα π.Χ. (Νέα Υόρκη, Μητροπολιτικό Μουσείο).



Μία εξίσωση είναι σαν ένας ζυγός διότι δείχνει ότι δύο ποσότητες είναι ίσες.



Εξίσωση με έναν άγνωστο  $x + 100 = 300$



Η εξίσωση περιλαμβάνει δύο ίσα μέρη, τα οποία λέγονται μέλη της εξίσωσης. Στην εξίσωση έχουμε δύο μέλη. Το πρώτο και το δεύτερο μέλος:

$$x + 100 = 300$$

Πρώτο μέλος	Δεύτερο μέλος
-------------	---------------



Για να λύσετε μία εξίσωση που περιλαμβάνει μία μεταβλητή, βρίσκετε την τιμή (ή τις τιμές) της μεταβλητής που επαληθεύει την ισότητα.



Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός που, όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

### 1. Δραστηριότητα

Προσπαθήστε να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις, με τη βοήθεια γραμμάτων.

- (α) Ένας φυσικός αριθμός: .....
- (β) Η τιμή ενός τετραδίου: .....
- (γ) Ο χρόνος που διαθέσατε για διάβασμα χτες: .....
- (δ) Το βάρος της σχολικής σας τσάντας: .....

### 2. Δραστηριότητα

Προσπαθήστε να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις, με τη βοήθεια αριθμών και γραμμάτων.

- (α) Ο προηγούμενος ενός φυσικού αριθμού: .....
- (β) Ο επόμενος ενός φυσικού αριθμού: .....
- (γ) Ένας άρτιος φυσικός αριθμός: .....
- (δ) Ένας περιττός φυσικός αριθμός: .....
- (ε) Τα πολλαπλάσια του 3: .....
- (στ) Το διπλάσιο ενός αριθμού: .....
- (ζ) Ένας αριθμός αυξάνεται κατά 8: .....
- (η) Ένας αριθμός ελαττωμένος κατά 4: .....
- (θ) Το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2, μας δίνει 22: .....
- (ι) Αν σε ένα αριθμό προσθέσουμε 5, το άθροισμα γίνεται 8: .....

### 3. Γράψτε συντομότερα τις εκφράσεις:

(α) $x + x + x + x$	(β) $\alpha + \alpha + \alpha + \beta + \beta$	(γ) $3 \cdot \alpha + 5 \cdot \alpha$
(δ) $18 \cdot x + 7 \cdot x + 4 \cdot x$	(ε) $15 \cdot \beta - 9 \cdot \beta$	(στ) $5 \cdot \beta + 9 \cdot \alpha - 3 \cdot \beta - 4 \cdot \alpha$

### 4. Να βρείτε τον αριθμό x σε κάθε περίπτωση:

(α) $x + 5 = 6$	(β) $x - 10 = 2$	(γ) $6 - x = 4$
-----------------	------------------	-----------------

5. (α) Να αντικαταστήσετε το  $x$ , με τους αριθμούς 1, 3, 4, 6 και 11, σε κάθε ισότητα της πρώτης στήλης, του παρακάτω πίνακα.

Ισότητα	Αντικατάσταση με το 1	Αντικατάσταση με το 3	Αντικατάσταση με το 4	Αντικατάσταση με το 6	Αντικατάσταση με το 11
$x - 1 = 5$					
$5 - x = 4$					
$2x = 8$					
$\frac{6}{x} = 2$					
$\frac{x}{2} = 3$					
$x + 7 = 18$					

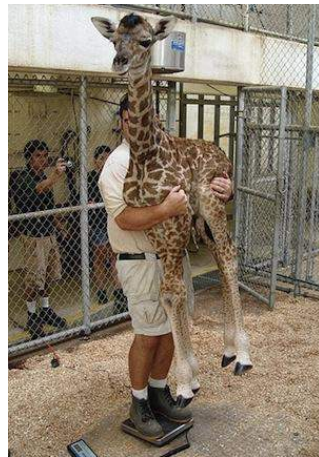
(β) Σημειώστε με ✓ στην περίπτωση που ο αριθμός επαληθεύει την ισότητα και με ✗ στην περίπτωση που δεν την επαληθεύει.

Ισότητα	Αριθμός 1	Αριθμός 3	Αριθμός 4	Αριθμός 6	Αριθμός 11
$x - 1 = 5$					
$5 - x = 4$					
$2x = 8$					
$\frac{6}{x} = 2$					
$\frac{x}{2} = 3$					
$x + 7 = 18$					

6. Πρόβλημα

Ένας εργαζόμενος στον ζωολογικό κήπο κρατά μία καμηλοπάρδαλη που μόλις γεννήθηκε για να την ζυγίσει. Η ζυγαριά κατέγραψε 153 κιλά. Ο εργαζόμενος μόνος του ζυγίζει 86 κιλά.

(α) Πόσο ζυγίζει η καμηλοπάρδαλη;



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(β) Επαλήθευση

.....

.....

.....



Τα βήματα για την επίλυση του προβλήματος:

1. Γράφετε την εξίσωση. Το ζητούμενο είναι το βάρος της καμηλοπάρδαλης.
2. Αφαιρείτε και από τα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό. (Κάνετε αφαίρεση, αφού είναι η αντίθετη πράξη της πρόσθεσης που υπάρχει στην εξίσωση).
3. Βρίσκετε την τιμή της μεταβλητής (την τιμή του αγνώστου).



Για να λύσετε μία εξίσωση μπορείτε να εργαστείτε έτσι ώστε να απομονώσετε τον άγνωστο στην μία πλευρά της εξίσωσης.



Για να επαληθεύσετε μία εξίσωση, αντικαθιστάτε την τιμή που βρήκατε στην εξίσωση και ελέγχετε αν ισχύει η ισότητα.



Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις.

Χρησιμοποιείτε πολλαπλασιασμό για να λύσετε τις εξισώσεις που περιλαμβάνουν διαίρεση και διαίρεση για να λύσετε τις εξισώσεις που περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμό.



Όταν διαιρείτε και τα δύο μέλη μίας εξίσωσης με τον ίδιο αριθμό, δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως διαιρέτη τον αριθμό μηδέν (0). Εξηγήστε γιατί:

.....  
 .....  
 .....

**7. Να λύσετε την εξίσωση  $a - 14 = 26$  και να κάνετε επαλήθευση.**

.....  
 .....  
 .....

**8. Να λύσετε την εξίσωση  $6 - x = 5$ , περιγράφοντας τα βήματα επίλυσης.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....

**9. Να βρείτε τον αριθμό b σε κάθε περίπτωση:**

<b>(α)</b> $4b = 12$	<b>(β)</b> $20 = 2b$	<b>(γ)</b> $\frac{b}{6} = 5$
----------------------	----------------------	------------------------------

**10. (α) Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x}{4} = 10,5$**

.....	1. Η πράξη που υπάρχει είναι διαίρεση.
.....	2. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το 4.
.....	3. Βρίσκουμε την λύση.

**(β) Πώς θα επαληθεύσετε την λύση σας;**

.....  
 .....  
 .....

**11. Να λύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις:**

<b>(α)</b> $3x = 5$	<b>(β)</b> $\frac{x}{4} = 18$	<b>(γ)</b> $100 = 16y$
---------------------	-------------------------------	------------------------

**12. Στην περιοχή της Κέρκυρας η μέση ετήσια βροχόπτωση είναι περίπου 2,80 φορές μεγαλύτερη από αυτήν της Αθήνας. Αν η βροχόπτωση στην Κέρκυρα είναι 137 mm, ποια είναι η μέση ετήσια βροχόπτωση στην Αθήνα;**

.....  
 .....  
 .....

**13. Αν οι γωνίες Α και Β είναι παραπληρωματικές και το μέτρο της γωνίας Α είναι 78°, ποιο είναι το μέτρο της γωνίας Β;**

.....  
 .....



Ο όγκος ισούται με το γινόμενο:  
Μήκος x Πλάτος x Ύψος

14. Ποιο είναι το ύψος μιας δεξαμενής χωρητικότητας  $6 \text{ m}^3$  που έχει μήκος  $1,5 \text{ m}$  και πλάτος  $2 \text{ m}$ ; Να διαλέξετε τη σωστή απάντηση και να εξηγήσετε γιατί.

- (α)  $1,5 \text{ m}$       (β)  $3 \text{ m}$       (γ)  $2 \text{ m}$

.....  
.....

15. Οι μινιατούρες αυτοκινήτων κατασκευάζονται με κλίμακα  $\frac{1}{43}$  του πραγματικού μεγέθους. Αν το μήκος του πραγματικού αυτοκινήτου είναι  $4,61$  μέτρα, πόσα εκατοστά είναι το μήκος της μινιατούρας;



.....  
.....  
.....  
.....

16. Να λύσετε τις εξισώσεις

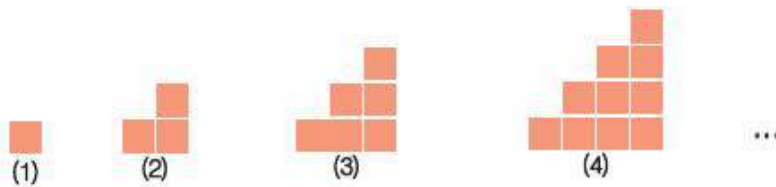
(α)  $\frac{4}{x} = \frac{16}{20}$

(β)  $\frac{38}{5} = x + \frac{8}{5}$

(γ)  $\frac{x+5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$

17. Τα τετράγωνα που αποτελούν τους «δομικούς λίθους» με τους οποίους κατασκευάζονται τα παρακάτω σχήματα, έχουν πλευρά ίση με  $1 \text{ cm}$ .

- (α) Βρείτε την περίμετρο του πέμπτου σχήματος και εξηγήστε πώς φθάσατε στην απάντησή σας.  
 (β) Γράψτε έναν τύπο με τη βοήθεια του οποίου θα μπορείτε να υπολογίσετε την περίμετρο κάθε σχήματος.  
 (γ) Ποια είναι η σειρά του σχήματος του οποίου η περίμετρος είναι  $128 \text{ cm}$ ;



.....  
.....  
.....  
.....  
.....



### Ασκήσεις προς λύση

4.1. Διατυπώστε τις παρακάτω προτάσεις χρησιμοποιώντας μεταβλητές:

- (α) Η περίμετρος ενός τετράγωνου.  
 (β) Το γινόμενο δύο αριθμών είναι 8.  
 (γ) Από το πενταπλάσιο ενός αριθμού αφαιρούμε το 2.  
 (δ) Η περίμετρος ισοσκελούς τριγώνου με βάση 3 cm.  
 (ε) Η ηλικία του παιδιού είναι το μισό της ηλικίας του πατέρα ελαττωμένο κατά 5 χρόνια ακόμη.  
 (στ) Το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου.  
 (ζ) Η περίμετρος ισοπλεύρου τριγώνου.

4.2. (α) Αν με  $\lambda$  συμβολίζεται ένας φυσικός αριθμός, πώς θα συμβολίσετε τον επόμενο του;  
 (β) Αν με  $\kappa - 1$  συμβολίζεται ένας φυσικός αριθμός, πώς θα συμβολίσετε τον προηγούμενο και τον επόμενο του αριθμού;  
 (γ) Αν με  $\nu + 1$  συμβολίζεται ένας φυσικός αριθμός, πώς θα συμβολίσετε τον επόμενο του αριθμού και πώς τον τριπλάσιο του αριθμού;

4.3. Να γράψετε με απλούστερο τρόπο τις μαθηματικές εκφράσεις:

- (α)  $\kappa + \kappa + \kappa + \kappa + \kappa$   
 (β)  $4\omega + 3\omega + 10\omega$   
 (γ)  $11z + 7z - 9z$

4.4. Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς 2, 4, 7 είναι λύση της εξίσωσης  $\gamma - 2 = 1 + 4$ .

4.5. (α) Αν ισχύει ότι  $\frac{x}{y} = 0$ , (με  $y \neq 0$ ), ποια είναι η τιμή του  $x$ ;

(β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i)  $\frac{x-3}{5} = 0$

(ii)  $\frac{6-3\gamma}{8} = 0$

(iii)  $\frac{5z-60}{9} = 0$

4.6. (α) Αν ισχύει ότι  $\frac{\kappa}{\lambda} = 1$ , να βρείτε τη σχέση που έχουν οι αριθμοί  $\kappa$ ,  $\lambda$ .

(β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i)  $\frac{x+5}{8} = 1$

(ii)  $\frac{3\omega-7}{20} = 1$

(iii)  $\frac{2\nu+3}{9} = 1$

4.7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α)  $\frac{1}{2}x = 1$

(β)  $\frac{5}{7}x = 1$

(γ)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = 1$

4.8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α)  $\frac{3}{4} : x = 2$

(β)  $\lambda : \frac{3}{8} = \frac{5}{9}$

(γ)  $1,2 : \nu = \frac{5}{8}$

4.9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α)  $3\gamma - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

(β)  $\frac{x}{4} - \frac{7}{8} = 2$

(γ)  $\frac{5z}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$

4.10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α)  $\frac{\omega}{2} = 0$

(β)  $3\phi = 0$

(γ)  $3x + 2 = 2$



**Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄: Αριθμητική – Άλγεβρα,  
Κεφάλαιο 5 - Ποσοστά**



# Κεφάλαιο 5: Ποσοστά

## A.5.1. Ποσοστά



### 18. Δραστηριότητα

Στον πίνακα της δραστηριότητας [mpa51.ggb](http://mpa51.ggb) φαίνεται το σύνολο των μαθητών που ψήφισαν στα σχολεία Α, Β, Γ και Δ και οι ψήφοι που πήραν οι αντίστοιχοι πρόεδροι δεκαπενταμελούς που εκλέχτηκαν.

Βρείτε, ποιος από τους προέδρους που εκλέχτηκαν, είναι ο πιο δημοφιλής.

Ποια διαδικασία ακολουθήσατε;

.....

.....

.....

.....

.....



Το σύμβολο α% ονομάζεται **ποσοστό επί τοις εκατό** ή απλούστερα **ποσοστό** και

είναι ίσο με το  $\frac{\alpha}{100}$ .



Χρησιμοποιείται επίσης το ποσοστό α‰ που διαβάζεται **ποσοστό επί τοις χιλίοις** και

είναι ίσο με το  $\frac{\alpha}{1000}$ .



Το ποσοστό α% του β είναι

$\frac{\alpha}{100} \cdot \beta$



Τα κλάσματα μπορούν να γράφονται και ως ποσοστά.

### 19. Να γράψετε, ως ποσοστά επί τοις εκατό, τα παρακάτω κλάσματα:

(α) $\frac{4}{5} =$	(β) $\frac{3}{8} =$	(γ) $\frac{84}{91} =$
---------------------	---------------------	-----------------------

### 20. Να γράψετε, ως κλάσματα τα ακόλουθα ποσοστά:

(α) 12% =	(β) 73% =	(γ) 32,5% =
-----------	-----------	-------------

### 21. Να υπολογίσετε:

(α) το 10% των 3000 €	(β) το 45% της 1 ώρας	(γ) το 20% του λίτρου
(δ) το 50 % των 500 γραμμαρίων		(ε) το 25% του 1 κιλού

### 22. Να βρείτε τι ποσοστό είναι:

(α) τα 50 € για τα 1.000 €	(β) οι 30 ημέρες για 1 έτος	(γ) τα 50 στρέμματα για τα 2.500 στρέμματα
----------------------------	-----------------------------	--

## Α.5.2. Προβλήματα με ποσοστά



Τα καταστήματα συχνά πωλούν προϊόντα με έκπτωση.

Έκπτωση (εκ-πτώση) είναι η μείωση της τιμής πώλησης ενός προϊόντος.

Συνηθέστερα ένα κατάστημα προσφέρει έκπτωση σε ένα προϊόν με βάση ένα ποσοστό της αρχικής τιμής του προϊόντος.



1. Η έκπτωση δίνεται συνήθως ως ποσοστό.
2. Από το ποσοστό της έκπτωσης μπορείτε να υπολογίσετε το ποσό της έκπτωσης πολλαπλασιάζοντας το ποσοστό με την αρχική τιμή.
3. Για να υπολογίσετε την τιμή του προϊόντος με έκπτωση αφαιρείτε το ποσό της έκπτωσης από την αρχική τιμή.



Το ποσό της έκπτωσης και η τιμή με έκπτωση είναι ίδια.

- Ποιο κλάσμα είναι ίσο με 50%;
- Πώς θα μπορούσατε να λύσετε το πρόβλημα χωρίς να κάνετε υπολογισμούς;



Η φράση -50% είναι το ίδιο

με το  $\frac{1}{2}$  της τιμής.



Άρα για να βρείτε την τιμή μπορείτε να υπολογίσετε το μισό των 5 ευρώ που είναι 2,5 ευρώ.

### 23. Πρόβλημα:

**Σε ένα βιβλιοπωλείο ένα βιβλίο που πωλείται προς 15 ευρώ μπορεί να αγοραστεί 10% φθηνότερα.**

(α) Σε τι αναφέρεται το 10%;

.....

(β) Ποια είναι η έκπτωση;

.....

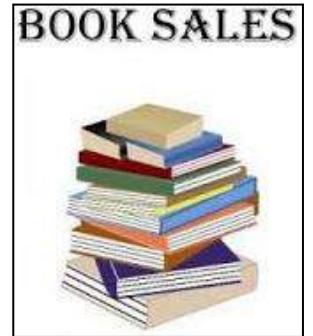
(γ) Ποια είναι η τιμή πώλησης του DVD;

.....

.....

.....

.....



### 4. Σε ένα πολυκατάστημα ένα φόρεμα αξίας 40 ευρώ έχει 25% έκπτωση.

(α) Σε τι αναφέρεται η φράση 25% έκπτωση;

.....

(β) Ποια είναι η έκπτωση;

.....

(γ) Ποια είναι η τιμή του φορέματος με την έκπτωση;

.....

.....

.....

### 5. Σε ένα κατάστημα πώλησης προϊόντων βιολογικής παραγωγής πωλείται μία σαλάτα αξίας 5 ευρώ που έχει ένα αυτοκόλλητο που αναγράφει «-50%».

(α) Σε τι αναφέρεται η φράση -50%;

.....

(β) Ποια είναι η έκπτωση;

.....

(γ) Ποια είναι η τιμή της σαλάτας με την έκπτωση;

.....

.....



6. Σε ένα bazaar βιβλίων, η τιμή πώλησης μία σειράς βιβλίων που το καθένα αξίζει 9 ευρώ είναι το  $\frac{1}{3}$  της αρχικής τιμής.

(α) Σε τι αναφέρεται η φράση είναι το  $\frac{1}{3}$  της αρχικής τιμής;

.....

(β) Ποια είναι η έκπτωση;

.....

(γ) Ποια είναι η τιμή του κάθε βιβλίου με την έκπτωση;

.....

.....

7. Σε ένα βιβλιοπωλείο ένα βιβλίο που πωλείται προς 15 ευρώ μπορεί να αγοραστεί 10% φθηνότερα. Ποια είναι η έκπτωση; Ποια είναι η τιμή πώλησης του DVD; Να υπολογίσετε την τιμή με έκπτωση με τον τρόπο που περιγράφεται αριστερά.

.....

.....

.....

.....



Από το ποσοστό έκπτωσης μπορείτε να υπολογίσετε το ποσοστό της τιμής που τελικά θα πληρωθεί, αν αφαιρέσετε από το 100 το ποσοστό έκπτωσης.

### Ανακεφαλαίωση

Τα καταστήματα συχνά πωλούν προϊόντα με μειωμένες-χαμηλότερες τιμές κάνοντας έκπτωση. Συνηθέστερα αυτή η έκπτωση είναι ένα ποσοστό της αρχικής τιμής. Οι φράσεις «-30%», «10% off», «στο  $\frac{1}{3}$  της αρχικής τιμής», «Έκπτωση 15%», «Save 25%», «Get a 20% discount» χρησιμοποιούνται για να δείχνουν την έκπτωση.

### Διαδικασία:

1. Για να υπολογίσετε το ποσό της έκπτωσης, πολλαπλασιάζετε το ποσοστό της έκπτωσης με την αρχική τιμή.
2. Για να υπολογίσετε την τιμή με έκπτωση, αφαιρείτε το ποσό της έκπτωσης από την αρχική τιμή.

### 8. Πρόβλημα:

Ο Κώστας εντόπισε σε ένα κατάστημα ηλεκτρονικού εμπορίου το τηλεχειριζόμενο ελικόπτερο που ήθελε να αγοράσει. Παρατηρώντας την τιμή είδε ότι είχε 49,00 ευρώ. Ωστόσο είδε και την τιμή 39,84 ευρώ στην οποία είχαν προστεθεί 9,16 ευρώ. Δεν γνώριζε όμως γιατί υπήρχαν δύο τιμές...



είναι το μικρότερο τηλεχειριζόμενο ελικόπτερο στην αγορά. Με ένα σύστημα ελέγχου 3.5 καναλιών, καθώς και το σχεδιασμό αυτόματης ισορροπίας είναι πραγματικά το ιδανικό όχημα για πτήση, όταν υπάρχει έλλειψη χώρου ή αν είστε αρχάριος σε θέματα πτήσεων.

- **Τηλεχειρισμός:** Τυπικός 3.5 καναλιών.
- **Μπαταρία:** 6 x AA (για τον τηλεχειρισμό του).
- **Πρόσθετα χαρακτηριστικά:** Φορτίζει μέσω του τηλεχειρισμού του με ικανότητα πτήσης έως και 7 λεπτά.
- **Βάρος:** 0.025kg.
- **Εγγύηση:** 1 χρόνος. DOA 7 ημερών

Κατασκευαστής:	
Κατηγορία:	ΜΟΝΤΕΛΙΣΜΟΣ
Υποκατηγορία:	ΕΛΙΚΟΠΤΕΡΑ
Τιμή:	39.84 € + 9.16 € 23% ΦΠΑ = 49.00 €
Διαθεσιμότητα:	Άμεσα διαθέσιμο για online παραγγελία / Διαθεσιμότητα καταστημάτων Αθήνας - Θεσσαλονίκης

Έτσι, ξεκίνησε την διερεύνησή του. Πρώτα από όλα ο Κώστας έλεγξε αν η πρόσθεση  $39,84 + 9,16$  δίνει ως αποτέλεσμα 49,00 ευρώ. Στη συνέχεια προσπάθησε να κατανοήσει την φράση «23% ΦΠΑ» που αναγραφόταν δεξιά του ποσού 9,16 ευρώ. Ποιο ρόλο έχει;

Ξεκίνησε με το λεξικό για να βρει το αρκτικόλεξο ΦΠΑ.

Το λεξικό έγραφε: **Φ.Π.Α.** (ο) Φόρος Προστιθέμενης Αξίας.

«Δεν φαίνεται πολύ διαφωτιστικό» είπε από μέσα του...

Η ηλεκτρονική εγκυκλοπαίδεια Βικιπαίδεια ήταν το επόμενο βήμα. Άνοιξε τον υπολογιστή, άνοιξε τον φυλλομετρητή του και πληκτρολόγησε: <http://el.wikipedia.org/>

Στη συνέχεια έγραψε το αρκτικόλεξο ΦΠΑ και εντόπισε: <http://el.wikipedia.org/wiki/ΦΠΑ>

Από όλα τα αναγραφόμενα κατέληξε ότι ο ΦΠΑ είναι ένας **φόρος** (δηλαδή ένα ποσό χρημάτων που καταβάλλουν οι πολίτες στο κράτος) που **προστίθεται** στην αξία μίας παρεχόμενης υπηρεσίας ή ενός προϊόντος που κάποιος αγοράζει.

Τα πράγματα γίνονταν πιο ξεκάθαρα. Το ποσοστό 23% ήταν το ποσοστό ΦΠΑ που προστίθεται στην αξία του ελικοπτέρου που ήθελε ο Κώστας να αγοράσει.

Το αρχικό πρόβλημα επαναδιατυπώθηκε στο μυαλό του Κώστα ως εξής:

Το τηλεχειριζόμενο ελικόπτερο κοστίζει 39,84 ευρώ. Αν ο ΦΠΑ είναι 23% ποιο είναι το ποσό του ΦΠΑ που θα πληρώσει; Ποιο είναι το συνολικό ποσό που θα πληρώσει για την αγορά του ελικοπτέρου περιλαμβάνοντας τον ΦΠΑ;

Ο Κώστας θυμήθηκε την διαδικασία που είχε ακολουθήσει για να υπολογίσει το ποσό της έκπτωσης, όπου και αυτή δινόταν ως ποσοστό.

Από το ποσοστό της έκπτωσης (το ποσοστό του ΦΠΑ) μπορεί να υπολογιστεί το ποσό της έκπτωσης (του ΦΠΑ) πολλαπλασιάζοντας το ποσοστό με την αρχική τιμή.

Το ποσοστό ΦΠΑ είναι 23%, δηλαδή  $23/100$  ή 0,23

Το ποσό του ΦΠΑ είναι  $0,23 \times 39,84 = 9,1632$  ευρώ (με στρογγυλοποίηση στο πλησιέστερο εκατοστό είναι 9,16 ευρώ).

Η τιμή με ΦΠΑ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{r} 39,84 \text{ (Αρχική τιμή)} \\ + 9,16 \text{ (Ποσό ΦΠΑ)} \\ \hline 49,00 \text{ (Τιμή με ΦΠΑ)} \end{array}$$





**Τόκος**

Είναι το χρηματικό ποσό που είναι υποχρεωμένος να δώσει ο οφειλέτης στο δανειστή για ορισμένη ποσότητα χρηματικού δανείου που πήρε και για ορισμένο χρονικό διάστημα. Ο τόκος είναι στην ουσία η αμοιβή-αποζημίωση του δανειστή για το ποσό που δάνεισε στον οφειλέτη.



**Επιτόκιο**

Είναι το ποσοστό επί τοις εκατό (%) του τόκου προς το συνολικό χρηματικό ποσό. Το επιτόκιο αναφέρεται πάντα σε ετήσια βάση.



Επιτόκιο α% σημαίνει ότι στο τέλος του χρόνου τα 100 ευρώ θα αυξηθούν κατά α ευρώ, δηλαδή συνολικά (100 + α) ευρώ.



Γενικά, όταν θέλετε να δανειστείτε χρήματα από μια τράπεζα, η τράπεζα ζητάει να της επιστρέψετε τα χρήματα με τόκο. Το ίδιο όμως συμβαίνει και όταν κάποιος καταθέτει στην τράπεζα χρήματα. Τα χρήματα αυτά τοκίζονται (δηλαδή ο πελάτης θα εισπράξει τόκο) γιατί στην περίπτωση αυτή ο πελάτης είναι ο δανειστής και η τράπεζα ο οφειλέτης.

**9. Ο Γιώργος κατέθεσε στην τράπεζα 1500 ευρώ για ένα χρόνο με επιτόκιο 2%. Πόσος είναι ο τόκος που θα εισπράξει στο τέλος του χρόνου;**

Για να υπολογίσετε τον ετήσιο τόκο, πολλαπλασιάζετε το κεφάλαιο (π.χ. κατάθεση ή χρηματικό δάνειο) επί το επιτόκιο. Δηλαδή, ετήσιος τόκος = κεφάλαιο · επιτόκιο

.....

.....

.....

.....

**10. Ένας έμπορος δανείστηκε από την τράπεζα 5.500 ευρώ για ένα χρόνο με επιτόκιο 8%. Πόσα ευρώ θα πληρώσει στο τέλος του χρόνου;**

.....

.....

.....

.....

**11. Ένας επιχειρηματίας δανείστηκε από την τράπεζα 50.000 ευρώ για 7 μήνες με επιτόκιο 6%. Τι τόκο θα πληρώσει στο τέλος των 7 μηνών;**

Για να υπολογιστεί ο τόκος για χρονικό διάστημα διαφορετικό του έτους, πολλαπλασιάζεται το κεφάλαιο επί το επιτόκιο, επί το κλάσμα που αντιστοιχεί στο μέρος του έτους που μας ενδιαφέρει.

.....

.....

.....

.....

**12. Να υπολογίσετε τον τόκο που θα εισπράξετε αν καταθέσετε στην τράπεζα 1000 ευρώ με επιτόκιο 5% για 9 μήνες**

.....

.....

.....

.....

**Ασκήσεις προς λύση**

**5.1.** Να γράψετε, ως ποσοστά επί τοις εκατό, τα παρακάτω κλάσματα:

(α)  $\frac{4}{5}$                       (β)  $\frac{39}{70}$                       (γ)  $\frac{11}{20}$                       (δ)  $\frac{5}{16}$

**5.2.** Να γράψετε, ως κλάσματα, τα ακόλουθα ποσοστά:

(α) 17%                      (β) 21,5%                      (γ) 95%                      (δ) 30%

**5.3.** Ποια θα είναι η τιμή πώλησης ενός tablet, αξίας 120 €, με επιβάρυνση ΦΠΑ 23%;

**5.4.** Μία εταιρεία κατασκευής επίπλων πούλησε έπιπλα αξίας 3.000 € με έκπτωση 450 €. Ποιο είναι το ποσοστό της έκπτωσης;

**5.5.** Ένα εισιτήριο τρένου για μία συγκεκριμένη διαδρομή κοστίζει 25 ευρώ. Αν για τρία εισιτήρια πληρώσει κάποιος 60 ευρώ, τι ποσοστό έκπτωσης του έγινε;

**5.6.** Ο Γιώργος αγόρασε έναν υπολογιστή αξίας 500 ευρώ και ο καταστηματάρχης του έκανε έκπτωση 140 ευρώ. Τι ποσοστό έκπτωσης του έγινε;

**5.7.** Ο ακαθάριστος μισθός ενός υπαλλήλου είναι 1650 ευρώ. Στο μισθό του γίνονται κρατήσεις για τα διάφορα ασφαλιστικά ταμεία 23%. Ποιος είναι ο καθαρός μισθός του υπαλλήλου;

**5.8.** Ένας ιχθυοπώλης αγόρασε ψάρια που έκαναν 250 € και τα πούλησε με ζημιά 20%. Πόσο ζημιώθηκε;

**5.9.** Ένας έμπορος αγοράζει το αυτοκίνητο 14.700 € και το πουλάει 18.816 €. Πόσο % κερδίζει;

**5.10.** Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε μια εγκυκλοπαίδεια με κέρδος 40% και κέρδισε 356 €. Πόσο την είχε αγοράσει;

**5.11.** Εμπορικό κατάστημα πουλάει τα εμπορεύματά του με έκπτωση 30% στην τιμή πώλησης. Πόση έκπτωση θα κάνει το κατάστημα σε έναν πελάτη που αγόρασε εμπορεύματα αξίας 7.352 €;

**5.12.** Αγοράσαμε μία ανθοδέσμη και πληρώσαμε συνολικά μαζί με τον Φ.Π.Α. 22,61 €. Αν ο συντελεστής για τον Φ.Π.Α. είναι 13%, να υπολογίσετε:

- (α) την αξία των ειδών αυτών χωρίς Φ.Π.Α.  
(β) τον Φ.Π.Α. που πληρώσαμε γι' αυτά.

**5.13.** Ένα αυτοκίνητο κόστιζε 20.000 €. Έγινε μια πρώτη αύξηση κατά 10% και μετά λίγους μήνες μια δεύτερη αύξηση κατά 15%. Κάποιος ισχυρίζεται ότι η τιμή αυξήθηκε συνολικά κατά 25%. Να εξετάσετε αν είναι σωστή η άποψη αυτή.

**5.14.** Ένα tablet κοστίζει 120 €. Την περίοδο των εκπτώσεων το κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών το πουλάει 15% φθηνότερα. Πόσο θα μας κοστίζει τελικά, αν το αγοράσουμε στις εκπτώσεις πληρώνοντας επιπλέον Φ.Π.Α. 23% στην τιμή αγοράς;

**5.15.** Ένας έμπορος αγόρασε 5 ποδήλατα αξίας 625 €. Πόσο πρέπει να πουλήσει το καθένα, αν το ποσοστό κέρδους του είναι 25%;

**5.16.** Ένα σκάφος πουλιόταν προς 55.000 €. Την 1/11/2012 αυξήθηκε η τιμή του κατά 12% και στις 15/1/2013 ελαττώθηκε κατά 12%.

- (α) Να βρείτε την τελική τιμή του σκάφους στις 15/1/2013.  
(β) Πόση θα ήταν η τελική τιμή του σκάφους, αν αρχικά ελαττωνόταν η τιμή του κατά 12% και ακολουθούσε αύξηση κατά 12%;

- 5.17.** Η τιμή ενός ποδηλάτου μειώθηκε κατά 16% και κοστίζει τώρα 168 €. Ποια ήταν η αρχική τιμή του ποδηλάτου;
- 5.18.** Καταθέτει ο Κώστας σε μια τράπεζα 7.000 € με επιτόκιο 2%. Τι ποσό θα πάρει σε δύο χρόνια, αν γίνεται ανατοκισμός κάθε εξάμηνο;
- 5.19.** Από ένα μπουκάλι οινόπνευμα εξατμίστηκε το 20% του όγκου του. Το μπουκάλι στην αρχή είχε 150 mL. Πόσα mL οινόπνευματος εξατμίστηκαν και πόσα mL οινόπνευματος απέμειναν στο μπουκάλι;
- 5.20.** Ένα αφρόλουτρο πάνω στην συσκευασία γράφει «Περισσότερο προϊόν 50% δωρεάν» και παρακάτω «600 mL +250 mL δωρεάν».
- (α)** Θεωρείτε ότι είναι σωστά αυτά που γράφει;
- (β)** Σε ποια περίπτωση η προσφορά θα ήταν πραγματικά δωρεάν το 50% του αφρόλουτρου;
- 5.21.** Ο πληθυσμός μιας πόλης ήταν το έτος 2010, 20.000 κάτοικοι. Το 2011 αυξήθηκε κατά 6%, το 2012 κατά 5% και το 2013 μειώθηκε κατά 5%. Να βρεθεί ο τελικός πληθυσμός το 2013.
- 5.22.** Κατατέθηκε ένα ποσό 120.000 €, σε ένα λογαριασμό ταμιευτηρίου, με επιτόκιο 2,5% το χρόνο.
- (α)** Ποιος θα είναι ο τόκος στο τέλος του πρώτου έτους;
- (β)** Ποιος θα είναι ο τόκος στο τέλος του δεύτερου έτους, αν ο τόκος του πρώτου έτους κεφαλαιοποιηθεί;
- 5.23.** Τι ποσό πρέπει να καταθέσετε στην τράπεζα, για να πάρετε στο τέλος του έτους 5.000 €, αν το επιτόκιο είναι 2%;

